UNIDADE 1 – ESTUDO DE PROPOSIÇÕES LÓGICAS
MÓDULO 1 – O PENSAMENTO E AS PROPOSIÇÕES LÓGICAS

01

1 - ESTRUTURA DO PENSAMENTO E A LÓGICA DAS PROPOSIÇÕES

O que é lógica? O que estudarei em lógica? Muitos devem se fazer estes questionamentos ao iniciar o estudo desta disciplina.

Lógica das proposições (ou lógica proposicional) é um mapeamento do formato e das regras do pensamento, possibilitando a verificação da verdade ou falsidade deste pensamento.

Para entender melhor, considere o exemplo de pensamento abaixo:

Todo humano é mortal. Leonardo é humano. Logo, Leonardo é mortal.

Mapeando este pensamento por meio da lógica, podemos simbolizá-lo no seguinte formato:

Todo **H** é **M**. **L** é **H**. Logo, **L** é **M**.

Ou

Todo **X** é **Y**. **Z** é **X**. Logo, **Z** é **Y**.

Não importa a letra utilizada para simbolizar cada fragmento de pensamento, mas sim a utilização destes símbolos para o auxílio da interpretação, visando representar a forma como o pensamento foi construído.

02

Este estudo clássico do pensamento é o fundamento da Lógica Matemática, que tem aplicação em várias áreas do conhecimento, tais como Computação, Filosofia e Matemática.

Para um profissional da área da computação, é necessário tornar-se apto a representar um conhecimento em uma linguagem lógica, para que futuramente esteja pronto ao aprendizado específico da área, como, por exemplo, o aprendizado de uma linguagem de programação utilizada no desenvolvimento de um *software* ou o aprendizado do funcionamento de circuitos lógicos constantes em uma placa-mãe do computador.

Sendo assim, devemos buscar o exercício do raciocínio lógico, por meio da representação do pensamento no formato de uma linguagem fácil e dedutível, que chamamos de **lógica proposicional**.

03

Voltando ao exemplo inicial:

Todo humano é mortal. Leonardo é humano. Logo, Leonardo é mortal.

Diz-se, na linguagem da lógica das proposições, que a frase “Todo humano é mortal” é uma proposição lógica. Por quê? Porque esta frase é constituída por uma combinação de palavras que **conseguiram exprimir um pensamento completo**.

Da mesma forma, a frase “Leonardo é humano” é uma **proposição**, pois o leitor consegue compreender por completo o pensamento expressado.

A terceira parte do exemplo, o trecho “Logo, Leonardo é mortal” é uma **proposição diferenciada**, pois se trata de uma conclusão (ou uma consequência) da análise conjunta das duas primeiras proposições.

Sendo assim, fica fácil notar que a **lógica matemática não é constituída apenas por proposições lógicas**, já que estas podem ser combinadas e conectadas por outros elementos, resultando na compreensão final da leitura, de forma similar ao que ocorre com a representação alfabética e gramatical na Língua portuguesa.

Proposição

Proposição é uma declaração que exprime o pensamento de forma completa, por meio de termos, palavras ou símbolos.

04

Os elementos usados para combinar uma ou mais proposições serão estudados com mais detalhe posteriormente nesta disciplina, mas é possível adiantar uma notação que representa o pensamento “Todo humano é mortal. Leonardo é humano. Logo, Leonardo é mortal” na lógica das proposições, como vemos a seguir.

O pensamento: “Todo humano é mortal. Leonardo é humano. Logo, Leonardo é mortal” pode também ser traduzido em:

Se **todo humano é mortal** e **Leonardo é humano**, então **Leonardo é mortal**.

Substituindo cada pensamento completo (chamados de proposição) por letras maiúsculas quaisquer, temos a representação:

Se A e B, então C

Onde:

A: todo humano é mortal.

B: Leonardo é humano.

C: Leonardo é mortal.

Na notação da lógica das proposições, a estrutura de pensamento “Se...., então...” é simbolizada por uma seta “→” conectando os dois pensamentos. Tem-se então:

A e B → C

Por fim, é preciso saber que na lógica das proposições o “e” é simbolizado por “∧”, resultando na seguinte notação final do pensamento “Todo humano é mortal. Leonardo é humano. Logo, Leonardo é mortal”:

$A \wedge B \rightarrow C$

Notação

Notação é a representação simbólica. Exemplos de símbolos usados em lógica: A, B, C, ∧ e →

05

Esta interessante tradução de um pensamento em uma combinação de símbolos da lógica das proposições é apenas uma forma de organizar as ideias, que facilita o raciocínio lógico necessário à interpretação de um pensamento expressado.

Certamente já nos expressamos, ou já vimos alguém se expressar, por meio de sentenças iguais ou similares às listadas abaixo:

O automóvel é um meio de transporte.

Os animais são todos mamíferos.

Brasília faz parte da região Sul do Brasil.

O ano possui um total de 12 meses.

O filho de Leila e Denis nasceu no Brasil.

Carlos é Engenheiro Civil desde 1981.

Lucas usa óculos somente para ler.

A praia mais perto fica a uma distância de 70 km.

Todas essas são sentenças ditas **declarativas**, devido à característica de admitem juízo de valor, ou seja, podem ser interpretadas como verdadeiras (V) ou falsas (F).

Para a lógica das proposições esta é a característica da **bivalência** de uma sentença declarativa, necessária e obrigatória para que a sentença seja chamada de **proposição lógica**.

Para ser uma proposição lógica, a sentença tem de ser declarativa.

Bivalência

A bivalência é uma característica das lógicas clássicas que significa que uma proposição lógica possui apenas dois tipos de valores: **verdadeiro** ou **falso**.

06

As sentenças declarativas são proposições lógicas e, portanto, são bivalentes.

Assim, a lógica das proposições adota como princípios (ou axiomas) as duas seguintes regras fundamentais do pensamento:

- Princípio do terceiro excluído → Uma proposição ou é verdadeira ou é falsa, sendo, pois, excluída a possibilidade de um terceiro valor.
- Princípio da não contradição → Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo, **pois uma** proposição não pode contradizer-se.

07

No entanto, não é possível atribuir um valor lógico de verdade ou falsidade a toda sentença da língua portuguesa. As **sentenças interrogativas**, por exemplo, não são consideradas como proposições lógicas, como é o caso da frase “Onde você mora?”.

Da mesma forma, as **sentenças imperativas**, como é caso de “Estudem mais!” e “Leiam o livro de lógica do Edgard Filho.”; e as **exclamativas**, tais como “Nossa!” e “Feliz Natal!”, também não são consideradas como proposições lógicas.

Podemos, então, concluir que:

Sentenças interrogativas, imperativas e exclamativas não emitem um juízo e, consequentemente, não se pode atribuir um valor de verdade ou falsidade.

Observe os exemplos a seguir, nas quais todas as sentenças são interrogativas, imperativas e exclamativas:

- Qual é o seu nome?
- Quantos anos seu filho tem?
- Não acredito nisso!
- Que absurdo!
- Feliz aniversário!
- Que este ano seja próspero!
- Leia mais livros!
- Pegue um café!

08

PROPOSIÇÕES LÓGICAS

A proposição é o conceito mais elementar da lógica em estudo. O nome proposição vem de "propor", ou seja, significa submeter à apreciação ou requerer um juízo.

Para que a referida apreciação seja possível, destacamos que **a sentença deve ser declarativa e deve exprimir o pensamento de forma completa, por meio de termos, palavras ou símbolos**.

Ou seja, são proposições:

- Belém é a capital do Pará.
- (2+2) = 4.
- humano é mortal.
- 3 é um número ímpar.
- (6-2) = 5.

- O Natal é dia 20 de dezembro.
- Tiradentes descobriu o Brasil.

Ao ler esses exemplos de proposições, nota-se que as mesmas permitem a avaliação de verdade ou falsidade quanto ao fato afirmado pela sentença. Essa avaliação é o que chamamos de definição do valor lógico de uma proposição.

09

VALORES LÓGICOS DAS PROPOSIÇÕES

Quando a proposição é verdadeira, então o seu valor lógico é **verdade**. Por outro lado, quando a proposição é falsa, o seu valor lógico é **falsidade**.

Assim, definem-se verdade e falsidade como valores lógicos de proposições, simbolizados abreviadamente por V e F, respectivamente.

É importante lembrar que verdade e falsidade são os dois únicos valores que podem ser assumidos por uma proposição, excluindo totalmente a possibilidade de atribuição de um terceiro valor lógico, segundo o princípio do terceiro excluído. Além disso, uma proposição não pode ser os dois valores lógicos, verdade e falsidade, ao mesmo tempo, conforme diz o princípio da não contradição.

A lógica das proposições é denominada de lógica bivalente devido ao fato de uma proposição poder ser interpretada apenas com um desses dois tipos de valores lógicos.

A notação do valor lógico “Falsidade” de uma proposição “x” é representada da seguinte forma:

V(x) = F

Onde se lê:

Valor lógico de x é F (ou) valor lógico da proposição x é **falsidade**.

Por exemplo, considerando a proposição “O Sol é quente”, que vamos chamar de proposição “y” para simplificar a escrita, temos então a seguinte notação e interpretação do valor lógico:

V(y) = V

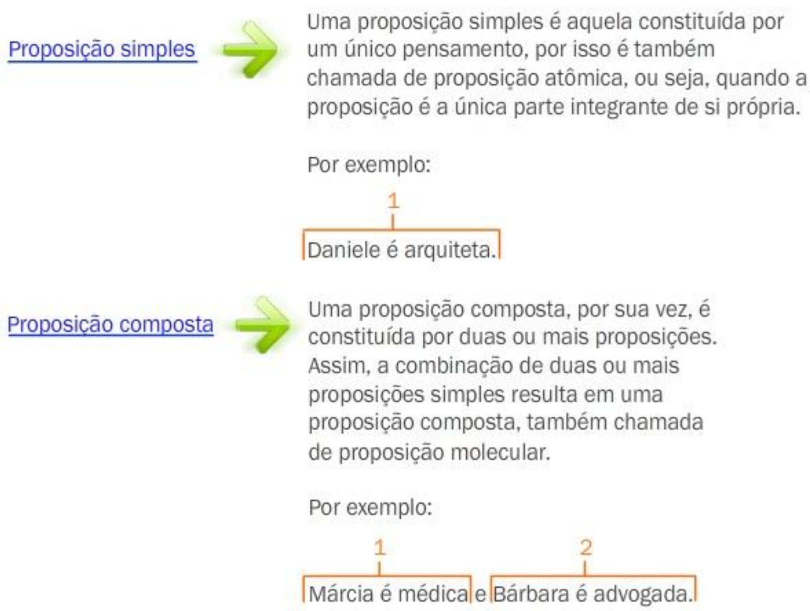
Onde se lê:

Valor lógico de y é V (ou) valor lógico da proposição y é **verdade**.

10

PROPOSIÇÕES SIMPLES E PROPOSIÇÕES COMPOSTAS

Toda e qualquer proposição pode ser classificada ou como **simples** ou como **composta**.



Percebe-se a existência de duas sentenças declarativas na proposição "Márcia é médica e Bárbara é advogada", que são:

1. Márcia é médica.
2. Bárbara é advogada.

Habitualmente, as proposições simples e compostas são diferenciadas em suas notações sendo representadas, respectivamente, por letras minúsculas e letras maiúsculas.

Voltando aos exemplos anteriores, podemos usar as seguintes representações:

p: Daniele é arquiteta. P: Márcia é médica e Bárbara é advogada.

Quanto à notação das proposições compostas, pode-se detalhar a representação da seguinte forma:

q: Márcia é médica. r: Bárbara é advogada. P: Márcia é médica e Barbara Advogada

A proposição composta pode ser escrita como:

P (q, r)

Esta notação mais detalhada de uma proposição composta é usada quando se deseja reforçar que a proposição composta P é constituída pelas proposições simples q e r.

A seguir, no estudo de conectivos lógicos, veremos que a proposição composta pode ser também obtida pela a combinação de outras proposições compostas.

13

CONECTIVOS DE PROPOSIÇÕES

São denominados **conectivos** os elementos usados para construir novos pensamentos, formando proposições novas a partir de outras proposições.

A seguir, são listados os tipos de conectivos e respectivos exemplos de proposições compostas:

Conectivo "e"

P: O programa político será exibido às 19h de hoje **e** o Jornal será exibido depois, às 20h.

P: Clara chega às 22h de hoje **e** Pedro irá buscá-la.

Conectivo "ou"

Q: Márcia é médica **ou** Priscila é médica.

Q: Sou inteligente **ou** o professor é Didático.

Conectivo "ou... ou"

R: Um animal de estimação **ou** é macho **ou** é fêmea.

R: Luiz **ou** é paulista **ou** é mineiro.

Conectivo "Se - então"

S: **Se** Carlos é engenheiro civil, **então** sabe bem matemática.

S: **Se** beber, **então** não dirija.

Conectivo “se e somente se”

T: Irei ao aniversário no clube **se e somente se** fizer sol.

T: Dirija **se e somente se** não beber.

Conectivo “não”

Z: **Não** choveu ontem.

Z: **Não** durmo cedo frequentemente.

Com exceção do conectivo “não”, os exemplos anteriores são de proposições compostas obtidas a partir da combinação de duas proposições simples.

Mas vale ressaltar que também são ditas compostas as proposições formadas por outras proposições compostas. Veja a seguir dois exemplos:

X: **Se** faz sol **e** eu acordo cedo, **então** vou ao clube.

S: Sou feliz **se e somente se** minha filha é feliz **e** meu marido é feliz.

Conforme avançamos no estudo da lógica das proposições, variadas combinações de conectivos em proposições são exploradas, bem como a negação de proposições simples e de proposições compostas.

Note que a lógica das proposições já faz parte da sua vida.

RESUMO

A lógica das proposições é mapeamento do formato e das regras do pensamento, possibilitando a verificação da verdade ou falsidade deste pensamento.

Para tanto, o pensamento precisa ser completo, ou seja, de claro entendimento. Quando isso ocorre, chamamos o pensamento de proposição ou de proposição lógica.

Uma proposição ou é verdadeira ou é falsa, sendo excluída a possibilidade de um terceiro valor, além de não poder ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.

Sentenças interrogativas, imperativas e exclamativas não são proposições lógicas, pois não emitem um juízo sobre o assunto e, portanto, não se pode atribuir um valor de verdade ou falsidade.

Classificam-se as proposições em simples ou compostas. As proposições simples são aquelas de expressam apenas um fato, mas, por outro lado, as proposições compostas são aquelas constituídas por dois ou mais fatos declarados. Para a combinação dos fatos, uma proposição composta conta com os conectivos “e”, “ou”, “ou...ou”, “se...então” e “se e somente se”. Sem esquecer do operador de negação “não”, que inverte o sentido da proposição original.

UNIDADE I – ESTUDO DE PROPOSIÇÕES LÓGICAS
MÓDULO 2 – INTERPRETAÇÃO DAS PROPOSIÇÕES LÓGICAS

01

INTERPRETANDO AS PROPOSIÇÕES LÓGICAS

A análise da estrutura do pensamento é a essência da lógica das proposições. Interpretar as sentenças lidas ou ouvidas é o cotidiano de qualquer pessoa, que, sem saber, está exercitado o raciocínio lógico matemático.

A partir dessa análise, identificam-se as sentenças que admitem juízo de valor V (verdade) ou F (falsidade), classificando-as como sentenças do tipo declarativas e, por tanto, bivalentes.

Uma sentença declarativa pode possuir juízo de valor já conhecido, conforme exemplos descritos a seguir:

p: O automóvel é um meio de transporte.
p é uma proposição simples de valor lógico Verdadeiro. Ou seja, V(p) = V

q: Os animais são todos mamíferos.
q é uma proposição simples de valor lógico Falso. Ou seja, V(q) = F

r: Brasília faz parte da região Sul do Brasil.
r é uma proposição simples de valor lógico Falso. Ou seja, V(r) = F

s: O ano possui um total de 12 meses.
s é uma proposição simples de valor lógico Verdadeiro. Ou seja, V(p) = V

Bivalentes
Como já visto, a lógica das proposições é denominada de lógica **bivalente**, pois uma proposição pode ser interpretada com um desses dois valores lógicos: verdade e falsidade. É importante lembrar também que:

- Verdadeiro e Falso são os dois únicos valores lógicos a serem assumidos por uma proposição, excluindo totalmente a existência de um terceiro valor. Este é o princípio do terceiro excluído.
- Uma proposição tem que assumir um valor lógico por vez, não podendo ser verdade e falsidade ao mesmo tempo. Este é o princípio da não contradição.

02

Há também as sentenças declarativas que não possuem valor lógico popularmente conhecido. Observe abaixo:

- O filho de Leila e Denis nasceu no Brasil.

De qual Leila se está falando? De qual Denis se está falando? Não há como saber. Logo, não há como interpretar imediatamente a declaração. Ao contrário do que o ocorreria com a sentença “O inventor Alberto Santos Dumont nasceu no Brasil”, que sabemos que é verdadeira.

- Carlos é Engenheiro Civil desde 1981.

De qual Carlos se está falando? Não há como saber. Logo, não há como interpretar imediatamente a declaração.

- Lucas usa óculos somente para ler.

De qual Lucas se está falando? Não há como saber. Logo, não há como interpretar imediatamente a declaração.

- O irmão de Marcos calça 41.

De qual Marcos se está falando? Não há como saber. Logo, não há como interpretar imediatamente a declaração.

- A praia mais perto fica a uma distância de 70 km.

Onde está a pessoa? De qual praia se está falando? Não há como saber. Logo, não há como interpretar imediatamente a declaração.

Para uma proposição cujo valor lógico não é único e conhecido, a análise deverá prever as duas possibilidades de interpretação, ou seja:

p: O filho de Leila e Denis nasceu no Brasil.

	V(p)
Possibilidade 1	V
Possibilidade 2	F

Perceba que, até o momento, os exemplos foram de proposições simples.

Vale lembrar que uma proposição simples pode ter o seu valor lógico alterado por meio da negação, mas, ainda que negadas, permanecem como proposições simples, por continuarem sendo constituídas por um pensamento único, conforme demonstram os exemplos abaixo:

Exemplo 1:

p: O automóvel é um meio de transporte.

p é uma proposição simples de valor lógico verdadeiro. Ou seja, V(p) = V

Negação de p: O automóvel <u>não</u> é um meio de transporte.

Ou seja, V(negação de p) = F

Exemplo 2:

p: O filho de Leila e Denis nasceu no Brasil.

Negação de p: O filho de Leila e Denis <u>não</u> nasceu no Brasil.

	V(p)	V(negação de p)
Possibilidade 1	V	F
Possibilidade 2	F	V

Proposições simples

Proposição simples é aquela constituída por um único pensamento, por isso é também chamada de proposição atômica, ou seja, quando a proposição é a única parte integrante de si própria.

04

A negação é o único conectivo lógico sem a função de combinar duas ou mais proposições lógicas, ao contrário dos exemplos a seguir, que são todos de proposições compostas:

- Todo ano possui 12 meses **e** inicia com o mês de janeiro.
- A casa do Arthur é com vista ao mar **e** o carro do Claudio tem carroceria.
- A festa da Flávia tinha bolo de chocolate **e** a Ana comeu apenas brigadeiro.
- Paulo é Engenheiro Civil **e** Bruno é Médico.
- O cachorro de Ana está vivo **ou** o gato de Claudia está doente.
- Vera comprou a tela com pintura em acrílico **ou** comprou a escultura em gesso.
- No ano passado, **ou** viajamos em agosto **ou** em setembro.
- Na cerimônia os formandos devem vestir **ou** terno preto **ou** terno grafite.
- **Se** a lua estiver cheia hoje, **então** sairei para jantar.
- **Se** José acordar cedo, **então** não pegaremos engarrafamento.
- **Se** João consegue correr 1 km, **então** José consegue correr 2 km.
- Silvia consegue ler **se e somente se** o ambiente está em silêncio.
- Mara vai ao supermercado hoje **se e somente se** João estiver disposto.

- Duda trabalha **se e somente se** faz um dia ensolarado.

Conectivo lógico
São denominados conectivos lógicos os elementos usados para construir novos pensamentos, formando proposições novas a partir de outras proposições. São eles: “não”, “e”, “ou”, “ou...ou”, “se...então” e “se e somente se”.

Proposições compostas
Uma proposição composta é constituída por duas ou mais proposições. Assim, a combinação de duas ou mais proposições simples resulta em uma proposição composta, também chamada de proposição molecular.

05

Análise da composição 1: “Todo ano possui 12 meses e inicia com o mês de janeiro.”

Analisaremos, a seguir, algumas proposições. Como já vimos os passos necessários para a análise, procure fazer a sua análise antes de clicar nos links “Solução”.

Dentre as sentenças exemplificadas, elencaremos duas proposições com valores lógicos de juízo conhecido. São elas:

p: todo ano possui 12 meses.

q: todo ano inicia com o mês de janeiro.

Combinando estas proposições simples utilizando vários tipos de conectivos lógicos, tornam-se possíveis variadas análises de estrutura do pensamento e de interpretação de valor lógico final.

Observe a primeira combinação na declaração:

- Todo ano possui 12 meses **e** inicia com o mês de janeiro.

Na lógica das proposições, a análise da estrutura do pensamento deve partir sempre do seguinte questionamento:

- **Esta é uma declaração de que tipo? É interrogativa, imperativa ou exclamativa?**

Lembre-se: procure executar ou responder o que é pedido antes de clicar em “Análise”.

ANÁLISE

A declaração não é interrogativa, nem imperativa, nem exclamativa, assim, a declaração é uma proposição lógica.

Saiba+
Sentenças interrogativas, imperativas e exclamativas não são proposições lógicas. A explicação é que não emitem um juízo e, portanto, não se pode atribuir um valor de verdade ou falsidade.

06

Confirmando-se que o pensamento é uma proposição da lógica, pode-se prosseguir na análise e verificar o seguinte aspecto:

- **Esta declaração é uma proposição simples ou uma proposição composta?**

ANÁLISE

Substituindo cada pensamento completo por letras minúsculas, conforme recomenda a notação habitual da lógica das proposições, temos:

Todo ano possui 12 meses e inicia com o mês de janeiro.

Sendo:
p: todo ano possui 12 meses.
q: todo ano inicia com o mês de janeiro.

Ou seja, estamos fazendo a análise de uma proposição que se resume na combinação de dois pensamentos: **p** e **q**.

Assim, pode-se classificar como **proposição composta**.

07

Sendo uma proposição composta, a continuidade da análise é a identificação do conectivo ou dos conectivos lógicos:

- **Quantos e quais conectivos lógicos estão presentes na proposição composta?**

ANÁLISE

- **Todo ano possui 12 meses e inicia com o mês de janeiro.**

O único conectivo presente é o “e”.

Este conectivo está combinando as duas proposições simples:

p: todo ano possui 12 meses.
q: todo ano inicia com o mês de janeiro.

A partir da ligação dessas proposições simples foi obtido um pensamento novo e composto: p e q.

“Todo ano possui 12 meses e todo ano inicia com o mês de janeiro”

Que é o mesmo que:

“Todo ano possui 12 meses e inicia com o mês de janeiro”

Após esmiuçar a estrutura da declaração em análise, partimos ao estudo do valor lógico da proposição:

- A declaração expressa informação(ões) de juízo conhecido?

ANÁLISE

- **Todo ano possui 12 meses e inicia com o mês de janeiro.**

A informação “todo ano possui 12 meses” é de juízo conhecido? Ou seja, todos nós detemos conhecimento para avaliar se a informação é verdadeira ou falsa?

A resposta é: Sim! É, sim, conhecido o juízo de valor lógico da proposição em análise.

Veja que a informação é sobre assunto de senso conhecido. Como também é, por exemplo, a declaração “o planeta terra é redondo”.

Da mesma forma que a informação “todo ano inicia com o mês de janeiro” é de juízo conhecido, pois todos sabem que é uma declaração verdadeira.

Ou seja, segundo a notação da lógica das proposições, temos:

$V(p) = V$
$V(q) = V$

Sendo
p: todo ano possui 12 meses.
q: todo ano inicia com o mês de janeiro.

09

Retornando à declaração em análise, identificamos que a proposição **p** é verdadeira e que a proposição **q** também é verdadeira. Esta é uma análise isolada de valor lógico, pois as proposições simples foram estudadas de forma individualizada. No entanto, ainda não foi feita a interpretação final do valor lógico, necessária para a conclusão do caso. Acompanhe a seguir:

- **Todo ano possui 12 meses e inicia com o mês de janeiro.**

Temos a seguinte análise concluída, quando ao estudo da declaração acima:

V(p) = V
V(q) = V

Sendo
p: todo ano possui 12 meses.
q: todo ano inicia com o mês de janeiro.

Mas qual o valor lógico da composição "p e q"?

Por se tratar de duas proposições simples de juízo popular, fica facilitada a interpretação da combinação p e q:

Vamos chamar de B a proposição composta "p e q", apoiando-se na notação da lógica das proposições.

Assim, podemos representar da seguinte forma a pendência de identificação do valor lógico de B:

V(B) = ?

Sendo
B: p e q

Sabendo que V(p) = V e V(q) = V, facilmente identificamos que a junção de resulta em uma Verdade como interpretação da proposição composta. Ou seja:

V(B) = V

O resultado V(B) = V é uma análise automática proporcionada pelo raciocínio humano. Possibilitado pelo fato de estarmos trabalhando com declarações e conectivos usualmente utilizados na linguagem coloquial.

Mais à frente o estudo irá lhe revelar que esta é uma regra de uma operação na lógica das proposições. Aguarde!

10

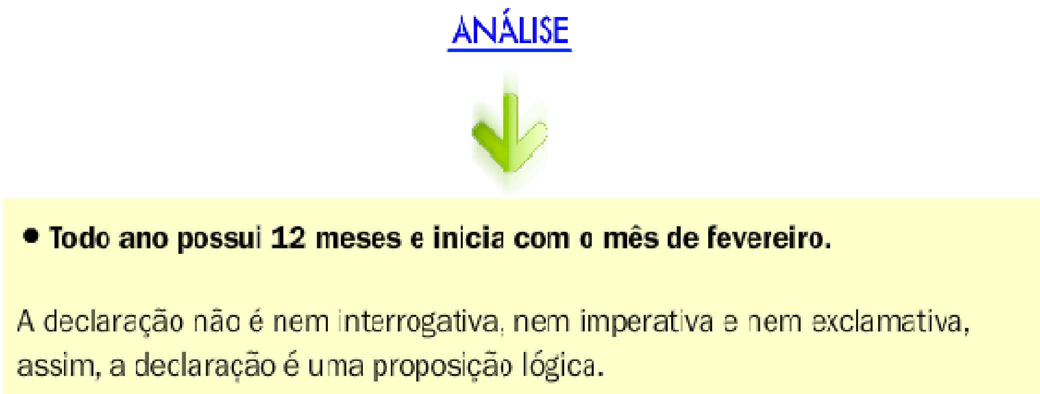
3 - ANÁLISE DA COMPOSIÇÃO 2: "TODO ANO POSSUI 12 MESES E INICIA COM O MÊS DE FEVEREIRO."

Considere agora seguinte declaração:

- Todo ano possui 12 meses e inicia com o mês de fevereiro.

Vamos à análise:

- **Esta é uma declaração de que tipo? É interrogativa, imperativa ou exclamativa?**



11

O passo seguinte é verificar:

- **Esta declaração é uma proposição simples ou uma proposição composta?**

ANÁLISE

- **Todo ano possui 12 meses e inicia com o mês de fevereiro.**

Substituindo cada pensamento completo por letras minúsculas, temos:

p: todo ano possui 12 meses.
q: todo ano inicia com o mês de fevereiro.

Ou seja, a declaração "p e q" é uma proposição composta, formada por duas proposições simples.

12

Sendo uma proposição composta, o próximo passo é a identificação do seguinte:

- **Quantos e quais conectivos lógicos estão presentes na proposição composta?**

ANÁLISE

- **Todo ano possui 12 meses e inicia com o mês de fevereiro.**

O único conectivo presente é o "e", que combina as duas proposições simples:

p: todo ano possui 12 meses.
q: todo ano inicia com o mês de fevereiro.

A partir da ligação dessas proposições simples foi obtido um pensamento novo e composto:
"p e q"

"Todo ano possui 12 meses e todo ano inicia com o mês de fevereiro"

Que é o mesmo que:

"Todo ano possui 12 meses e inicia com o mês de fevereiro"

13

Inicia-se agora o estudo do valor lógico da proposição com a seguinte pergunta:

- **A declaração expressa informação(ões) de juízo conhecido?**

ANÁLISE

- **Todo ano possui 12 meses e inicia com o mês de fevereiro.**

A informação “todo ano possui 12 meses” é de juízo conhecido?

A informação “todo ano inicia com o mês de fevereiro” é de juízo conhecido?

Quando perguntamos se é de juízo conhecido, devemos analisar se é um assunto de senso popularmente conhecido.

A resposta é: sim.

Ou seja, segundo a notação da lógica das proposições, temos os seguintes valores lógicos:

V(p) = V
V(q) = F

Lembrando que:

p: todo ano possui 12 meses
q: todo ano inicia com o mês de fevereiro.

14

Para fazer a interpretação final do valor lógico, acompanhe a seguir a análise da proposição composta:

ANÁLISE

- **Todo ano possui 12 meses e inicia com o mês de fevereiro.**

Temos até o momento:
V(p) = V
V(q) = F

Sendo
p: todo ano possui 12 meses.
q: todo ano inicia com o mês de fevereiro.

Vamos chamar de B a proposição composta “p e q”.

Assim, podemos representar da seguinte forma a pendência de identificação do valor lógico de B:

V(B) = ?

Sendo
B: p **e** q

No exemplo que vimos anteriormente, p e q eram verdades. Mas agora a proposição B tem uma proposição componente Falsa.

Como fica a combinação V(p)=V **e** V(q)=F ?

Resposta

Resposta

A resposta está no estudo mais aprofundado das combinações de valores lógicos e das operações lógicas.

No entanto, apoiando-se apenas em uma análise automática do raciocínio humano sobre a linguagem coloquial e rotineira, a interpretação é que a declaração "Todo ano possui 12 meses e inicia com o mês de fevereiro" é Falsa.

Ou seja, **V(B) = F**

Posteriormente, o estudo confirmará e explicará este resultado por meio das regras das operações lógicas. No momento, a necessidade é o entendimento da estrutura lógica de um pensamento e a identificação das proposições e conectivos.

<<Fechar

ANÁLISE DA COMPOSIÇÃO 3: "TODO ANO POSSUI 12 MESES E NÃO INICIA COM O MÊS DE JANEIRO."

Considere agora a seguinte combinação:

- Todo ano possui 12 meses e **não** inicia com o mês de janeiro.

Vamos à análise:

- **Esta é uma declaração de que tipo? É interrogativa, imperativa ou exclamativa?**

ANÁLISE

- Todo ano possui 12 meses e **não** inicia com o mês de janeiro.

A declaração não é nem interrogativa, nem imperativa e nem exclamativa, assim, a declaração é uma proposição lógica.

16

- Esta declaração é uma proposição simples ou uma proposição composta?

ANÁLISE

- Todo ano possui 12 meses e **não** inicia com o mês de janeiro.

Substituindo cada pensamento completo por letras minúsculas, temos:

p: todo ano possui 12 meses.
q: todo ano inicia com o mês de janeiro.
Negação de q: todo ano não inicia com o mês de janeiro.

Ou seja, a declaração "p e não q" é uma **proposição composta**, formada por duas proposições simples, sendo que uma delas está negada.

17

- Quantos e quais conectivos lógicos estão presentes na proposição composta?

ANÁLISE

- Todo ano possui 12 meses e **não** inicia com o mês de janeiro.

Os conectivos são o “e” e o “não”. O conectivo “e” juntou a proposição p com a proposição q negada.

p: todo ano possui 12 meses.
q: todo ano inicia com o mês de janeiro.
Negação de q: todo ano não inicia com o mês de janeiro.

A partir da ligação dessas proposições simples foi obtido um pensamento novo e composto:
“p e não q”

“Todo ano possui 12 meses e todo ano não inicia com o mês de janeiro.”

Que é o mesmo que:

“Todo ano possui 12 meses e não inicia com o mês de janeiro”

- **A declaração expressa informação(ões) de juízo conhecido?**

ANÁLISE

- Todo ano possui 12 meses e **não** inicia com o mês de janeiro.

A informação "todo ano possui 12 meses" é de juízo conhecido?

A informação "todo ano não inicia com o mês de janeiro" é de juízo conhecido?

A resposta é: Sim.

Ou seja:

V(p) = V
V(q) = V
V(negação de q) = F

Lembrando que:

p: todo ano possui 12 meses.
q: todo ano inicia com o mês de janeiro.
Negação de q: todo ano não inicia com o mês de janeiro.

19

Agora observe a **análise final**:

Temos até o momento:

V(p) = V

V(q) = V

V(negação de q) = F

Sendo

p: todo ano possui 12 meses.

q: todo ano inicia com o mês de janeiro.

Negação de q: todo ano não inicia com o mês de janeiro

A pendência existente é a identificação do valor lógico de B:

V(B) = ?

Sendo

B: p e não q

Resposta

Resposta

No exemplo anterior analisamos também a junção de um "V" com um "F" por meio do conectivo "e". Lembram?

Apoiando-se apenas em uma análise automática do raciocínio humano sobre a linguagem coloquial e rotineira, a interpretação é que a declaração "Todo ano possui 12 meses e não inicia com o mês de janeiro" é Falsa.

Ou seja, V(B) = F

Posteriormente, o estudo confirmará e explicará este resultado por meio das regras das operações lógicas.

<<Fechar

20

ANÁLISE DA COMPOSIÇÃO 4: "TODO ANO POSSUI 12 MESES OU INICIA COM O MÊS DE JANEIRO."

Considere agora mais uma combinação com as proposições em análise:

- Todo ano possui 12 meses ou inicia com o mês de janeiro.

Vamos à análise:

- **Esta é uma declaração de que tipo? É interrogativa, imperativa ou exclamativa?**

ANÁLISE

- Todo ano possui 12 meses **ou** inicia com o mês de janeiro.

A declaração não é nem interrogativa, nem imperativa e nem exclamativa, assim, a declaração é uma proposição lógica.

21

- Esta declaração é uma proposição simples ou uma proposição composta?

ANÁLISE

- Todo ano possui 12 meses **ou** inicia com o mês de janeiro.

Substituindo cada pensamento completo por letras minúsculas, temos:

Sendo
p: todo ano possui 12 meses.
q: todo ano inicia com o mês de janeiro.

Ou seja, a declaração "p ou q" é uma **Proposição Composta**, formada por duas proposições simples.

22

- Quantos e quais conectivos lógicos estão presentes na proposição composta?

ANÁLISE

- Todo ano possui 12 meses **ou** inicia com o mês de janeiro.

O único conectivo é o “ou”, que relaciona a proposição p com a proposição q:

“p **ou** q”

Sendo
p: todo ano possui 12 meses.
q: todo ano inicia com o mês de janeiro.

“Todo ano possui 12 meses ou todo ano inicia com o mês de janeiro” é o mesmo que:

“Todo ano possui 12 meses ou inicia com o mês de janeiro”

- A declaração expressa informação(ões) de juízo conhecido?

ANÁLISE

- Todo ano possui 12 meses **ou** inicia com o mês de janeiro.

A informação "todo ano possui 12 meses" é de juízo conhecido?

A informação "todo ano inicia com o mês de janeiro" é de juízo conhecido?

A resposta é: sim.

Ou seja:

V(p) = V
V(q) = V

Lembrando que:

p: todo ano possui 12 meses.
q: todo ano inicia com o mês de janeiro.

Agora observe a **análise final**.

Temos até o momento:

V(p) = V
V(q) = V

Sendo
p: todo ano possui 12 meses.
q: todo ano inicia com o mês de janeiro.

A pendência existente é a identificação do valor lógico de B:

V(B) = ?

Sendo
B: p ou q

Como fica a combinação V(p)=V ou V(q)=V ?

Resposta

Resposta

Apoiando-se apenas em uma análise automática do raciocínio humano sobre a linguagem coloquial e rotineira, a interpretação é que a declaração "Todo ano possui 12 meses ou inicia com o mês de janeiro" é Verdadeira.

Ou seja, V(B) = V

Posteriormente, o estudo confirmará e explicará este resultado por meio das regras das operações lógicas.

<<Fechar

6 - Análise da composição 5: "Todo ano ou possui 12 meses ou inicia com o mês de janeiro."

Considere agora a última combinação a ser analisada:

- T odo ano ou possui 12 meses ou inicia com o mês de janeiro.

Vamos à análise:

- **Esta é uma declaração de que tipo? É interrogativa, imperativa ou exclamativa?**

ANÁLISE

- Todo ano **ou** possui 12 meses **ou** inicia com o mês de janeiro.

A declaração não é nem interrogativa, nem imperativa e nem exclamativa, assim, a declaração é uma proposição lógica.

26

- ➢ Esta declaração é uma proposição simples ou uma proposição composta?

ANÁLISE

- Todo ano **ou** possui 12 meses **ou** inicia com o mês de janeiro.

Substituindo cada pensamento completo por letras minúsculas, temos:

"Todo ano ou possui 12 meses ou inicia com o mês de janeiro"

Sendo:
p: todo ano possui 12 meses.
q: todo ano inicia com o mês de janeiro.

Ou seja, a declaração "ou p ou q" é uma **proposição composta**, formada por duas proposições simples.

27

- ➢ Quantos e quais conectivos lógicos estão presentes na proposição composta?

ANÁLISE

- Todo ano **ou** possui 12 meses **ou** inicia com o mês de janeiro.

O único conectivo é o “ou... ou”, que relaciona a proposição p com a proposição q:

“ou. p ou. q”

Sendo
p: todo ano possui 12 meses.
q: todo ano inicia com o mês de janeiro.

“**ou** todo ano possui 12 meses **ou** todo ano inicia com o mês de janeiro”

Que é o mesmo que:

“Todo ano **ou** possui 12 meses **ou** inicia com o mês de janeiro”

- A declaração expressa informação(ões) de juízo conhecido?

ANÁLISE

- Todo ano **ou** possui 12 meses **ou** inicia com o mês de janeiro.

As informações "todo ano possui 12 meses" e "todo ano inicia com o mês de janeiro" são de juízo conhecido.

Ou seja:

V(p) = V
V(q) = V

Sendo
p: todo ano possui 12 meses.
q: todo ano inicia com o mês de janeiro.

29

Veja a análise final:

Temos até o momento:

V(p) = V

V(q) = V

Sendo

p: todo ano possui 12 meses.

q: todo ano inicia com o mês de janeiro.

A pendência existente é a identificação do valor lógico de B:

V(B) = ?

Sendo

B: ou p ou q

Como fica a combinação **ou** V(p)=V **ou** V(q)=V ?

Resposta

Resposta

Apoiando-se apenas em uma análise automática do raciocínio humano sobre a linguagem coloquial e rotineira, a interpretação é que a declaração "Todo ano **ou** possui 12 meses **ou** inicia com o mês de janeiro" é Falsa. Perceba que a declaração não faz sentido.

Ou seja, V(B) = F

Posteriormente, o estudo confirmará e explicará este resultado por meio das regras das operações lógicas. Aguarde!

<<Fechar

O próximo módulo continua o estudo com os conectivos "e", "ou" e "ou... ou", e também aborda os conectivos "se.... então" e "se e somente se". Por enquanto, o importante é a consciência de que qualquer informação declarativa será automaticamente esmiuçada por meio do nosso raciocínio lógico natural. Na maioria das vezes esta intuição nos garante a correta interpretação, mas em outros casos, ela não é suficiente para a análise segundo a ciência da lógica matemática das proposições.

Assim sendo, no decorrer desta disciplina são apresentados mecanismos eficientes que garantem as corretas análise e conclusão, sem restar dúvida quanto à veracidade ou falsidade de uma determinada declaração.

"Ela [a lógica] lhe dará clareza de pensamento, a habilidade de ver seu caminho através de um quebra-cabeça, o hábito de arranjar suas ideias numa forma acessível e ordenada e, mais valioso que tudo, o poder de detectar falácias e despedaçar os argumentos ilógicos e inconsistentes que você encontrará tão facilmente nos livros, jornais, na linguagem cotidiana e mesmo nos sermões e que tão facilmente enganam aqueles que nunca tiveram o trabalho de instruir-se nesta fascinante arte."

Lewis Carroll

31

RESUMO

O estudo da Lógica das Proposições parte da análise da estrutura do pensamento declarado e, subsequente, interpretação quanto ao valor lógico do mesmo. Apesar de ser uma ação intuitiva e instintiva do cérebro humano, ela não é suficiente ao estudo da Lógica das Proposições.

Portanto, a partir do estudo desta disciplina, o exercício lógico natural ao ser humano vai compartilhando espaço com estudo científico das lógicas clássicas, que enfocam as sentenças do tipo declarativas e bivalentes, conduzindo-nos aos seguintes passos interpretativos:

1) Separação do pensamento declarativo;
2) Classificação em proposição simples ou composta;
3) Se for uma proposição composta:
    a. Identificação das proposições simples componentes;
    b. Identificação dos conectivos existente;
    c. Análise isolada do valor lógico dessas proposições simples;
4) Análise final do valor lógico da proposição. Se composta, consideram-se os valores lógicos de cada componente e conexões existentes.

UNIDADE 1 – ESTUDO DE PROPOSIÇÕES LÓGICAS
MÓDULO 3 – OPERAÇÕES LÓGICAS COM OS CONECTIVOS “E”, “OU” E “OU...OU”

01

1 - OPERAÇÕES LÓGICAS

Bem-vindo ao estudo da Lógica das proposições! Os conectivos lógicos já são conhecidos. Aprendemos que:

> São denominados conectivos os elementos que possibilitam a criação de novas proposições, quando combinados com outras proposições.

Sendo assim, só é possível compor um pensamento **novo** devido ao **uso dos conectivos** “e”, “ou”, “ou...ou”, “Se - então” e “se somente se” e “não”, que na lógica das proposições dão origem às respectivas **operações lógicas**:

Operação		Conectivo
Operação Conjunção		"e"
Operação Disjunção		"ou"
Operação Disjunção Exclusiva		"ou…ou"
Operação Condicional		"Se - então"
Operação Bicondicional		"se somente se"
Operação Negação		"não"

02

A. Conjunção (∧)

A operação conjunção está presente em proposições compostas onde o conectivo "e" promove a conexão de sentenças. Esta operação lógica é simbolizada por "∧".

Considerando a convenção de representar a proposição simples por letras minúsculas e as compostas por letras maiúsculas, vamos a seguir demonstrar a notação de proposições com a operação conjunção:

A terra é redonda e o sol é quente.

p: A terra é redonda.

q: o sol é quente.

R: A terra é redonda e o sol é quente.

R: $p \wedge q$

Além da notação correta, é importante que a interpretação do valor lógico seja também feita para cada proposição simples, para que seja possível obter a avaliação final da proposição composta.

03

Como as proposições "A terra é redonda" e " O sol é quente" trazem declarações de juízo conhecido, **sabe-se então** o seguinte quanto ao valor lógico:

Sendo:

p: A terra é redonda.

Então o valor lógico de p é verdade, simbolicamente representado por:

V(p) = V

Sendo:

q: o sol é quente.

Então o valor lógico de q é verdade, simbolicamente representado por:

V(q) = V

No entanto, qual seria o valor lógico da proposição R, que foi formada pela conjunção de p e q? Veja a seguir.

04

R: A terra é redonda **e** o sol é quente.

A terra é redonda	O sol é quente	A terra é redonda **e** o sol é quente
p	q	p ∧ q
V	V	?

Para a operação da conjunção de duas proposições, a regra é a seguinte:

A conjunção é verdade quando, e somente quando, ambas as proposições componentes são verdades.

Ou seja:

A terra é redonda	O sol é quente	A terra é redonda **e** o sol é quente
p	q	**p ∧ q**
V	V	**V**

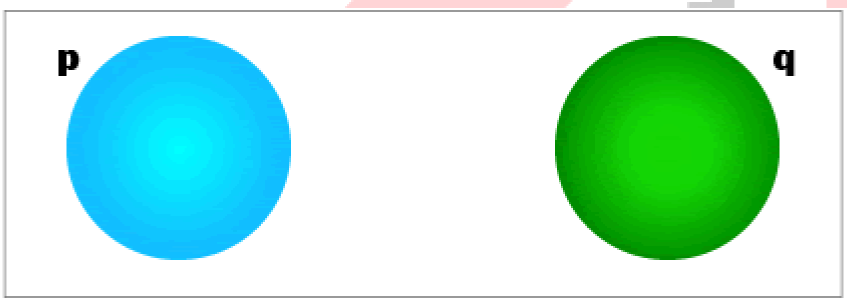
É importante frisar que o resultado final de uma conjunção será Verdade **somente quando** ambas as proposições componentes forem Verdades.

05

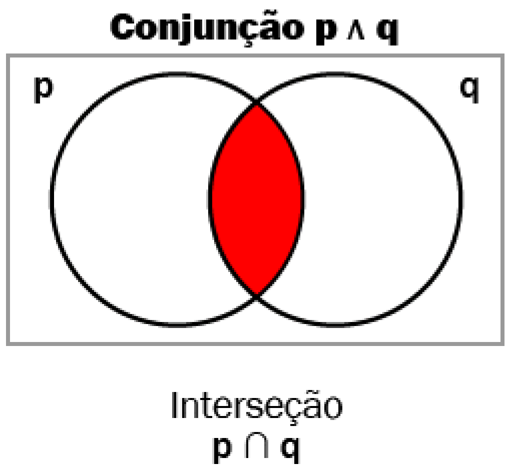
Uma forma simples de assimilar a regra da conjunção é imaginarmos que fizemos um pedido na lanchonete e o garçom confirma:

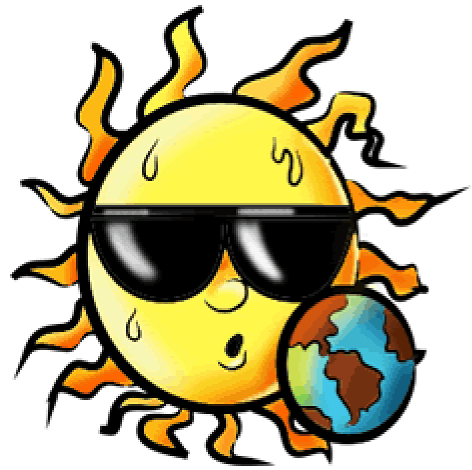
Caso o garçom retorne apenas com o sanduíche de atum, qualquer um de nós sabe que o pedido não terá sido atendido corretamente! Essa interpretação natural é atribuída ao fato do "e" fixar a ideia de que as duas partes da declaração devem ser cumpridas para que seja satisfatório o resultado.

Outra grande ferramenta ao entendimento das operações lógicas é a compreensão da relação existente com a teoria dos conjuntos. Considere, por exemplo, a existência de dois conjuntos. Um deles, chamado p e o outro conjunto denominado q. Isto é:



Relacionando com a conjunção, cuja regra diz que o resultado da operação será verdade somente quando as duas proposições componentes forem verdades, o que interessa é a **interseção** dos dois referidos conjuntos, pois a área da interseção representa um grupo de elementos que satisfazem tanto ao **p** quanto ao **q**, simultaneamente:





07

B. Disjunção (V)

A operação disjunção está presente em proposições compostas onde o conectivo "ou" promove a ligação de sentenças. Esta operação lógica é simbolizada por "V".

Veja a seguir a notação da disjunção entre duas proposições:

A terra é redonda ou o sol é quente.

p: A terra é redonda.
q: o sol é quente.
R: A terra é redonda **ou** o sol é quente.

R: p v q

08

Passando ao estudo do valor lógico da proposição R, obtida a partir da disjunção de p com q, temos o representado abaixo.

Sendo
p: A terra é redonda.

Então o valor lógico de **p** é verdade:

V(p) = V

Sendo
q: o sol é quente.

Então o valor lógico de **q** é verdade:

V(q) = V

Qual é o valor lógico da proposição R, formada pela disjunção de p com q? Veja a seguir.

09

R: A terra é redonda **ou** o sol é quente.

A terra é redonda	O sol é quente	A terra é redonda **ou** o sol é quente
p	q	$p \vee q$
V	V	?

Para a operação da disjunção de duas proposições, a regra é a seguinte:

Basta que uma delas seja verdade para que o resultado final da disjunção seja verdade.

Ou seja:

A terra é redonda	O sol é quente	A terra é redonda **ou** o sol é quente
p	q	$p \vee q$
V	V	V

Note que, se ambas as proposições componentes são verdade, então já fica satisfeita a regra de pelo menos uma delas ser verdade.

10

É importante destacar que o resultado final de uma disjunção também é verdade nos seguintes casos:

R: A terra é redonda **ou** o sol é <u>frio</u>.

A terra é redonda	O sol é frio	A terra é redonda **ou** o sol é frio
p	q	**p ∨ q**
V	F	**V**

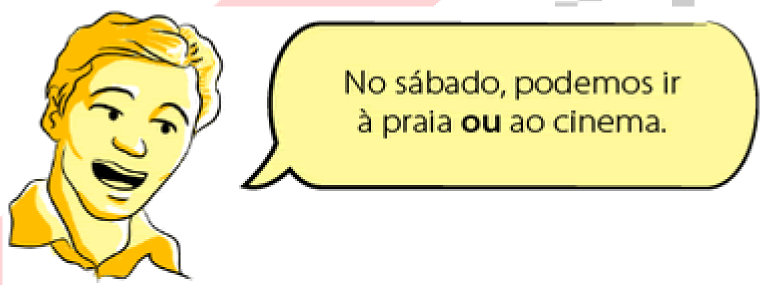
** Bastou V(p) = V para o resultado final V(p* **V** *q) fosse V.*

R: A terra é <u>quadrada</u> **ou** o sol é quente.

A terra é quadrada	O sol é quente	A terra é <u>quadrada</u> **ou** o sol é quente
p	q	**p ∨ q**
F	V	**V**

Bastou V(q) = V para o resultado final V(p v q) fosse V

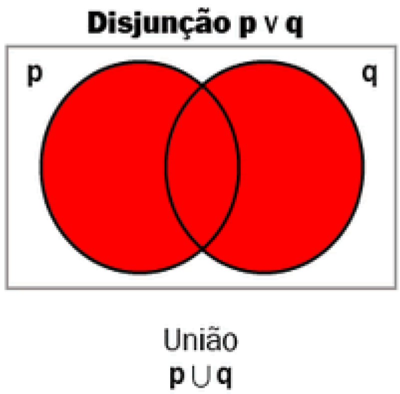
Para garantir o entendimento, considere uma situação cotidiana de planejamento da programação do fim de semana, onde o pai diz:



Não seria incoerente se o filho dissesse que poderiam ir aos dois lugares no sábado. Nem tão pouco, se o filho escolhesse apenas um dos lugares propostos pelo pai. A única resposta que invalidaria totalmente a proposta inicial do pai seria se o filho disse que não iria nem à praia e nem ao cinema, e escolhesse um terceiro lugar diferente.

Essas possibilidades de diálogos entre o pai e o filho compõem o conceito da regra da disjunção, que estabelece que se pode validar ambas ou ao menosuma das duas opções declaradas.

Quanto à teoria dos conjuntos, a representação da disjunção é a **união** dos conjuntos, por observar que as duas proposições não precisam ser verdadeiras simultaneamente, para a operação ser verdadeira:



12

C. Disjunção Exclusiva (V)

A operação disjunção exclusiva, simbolizada por "V", está presente em proposições compostas pelo conectivo "ou", que aparece normalmente duplicado na sentença, desde que exprima a ideia de exclusão de uma das proposições componentes.

Por exemplo:

Rio de Janeiro é a capital do Brasil ***ou*** *a capital é Brasília.*

p: Rio de Janeiro é a capital do Brasil.
q: Brasília é a capital do Brasil.
R: **Ou** *Rio de Janeiro é a capital do Brasil* **ou** *a capital é Brasília.*

R: p V q

Nota-se que a declaração desta proposição **R** obriga a exclusão de uma das possibilidades, pois o Brasil não pode ter duas cidades capitais. Esta é a grande diferença entre a disjunção e a disjunção exclusiva.

13

Como a proposição R declara uma afirmativa de juízo já conhecido, como é caso do conhecimento da capital do Brasil, pode-se até suprir o primeiro "ou" da expressão do pensamento:

R: Rio de Janeiro é a capital do Brasil **ou** a capital é Brasília.

R: p $\underline{\vee}$ q

Quanto ao estudo do valor lógico da proposição R, obtida a partir da disjunção exclusiva de p com q, temos o seguinte.

Sendo:

p: Rio de Janeiro é a capital do Brasil.
Então o valor lógico de p é falso:

V(p) = F

Sendo:

q: Brasília é a capital do Brasil.
Então o valor lógico de q é verdade:

V(q) = V

Qual é o valor lógico da proposição R, formada pela disjunção exclusiva de p com q? Veja a seguir.

R: Rio de Janeiro é a capital do Brasil **ou** a capital é Brasília.

Rio de Janeiro é a capital do Brasil	Brasília é a capital do Brasil	Rio de Janeiro é a capital do Brasil **ou** a capital é Brasília.
p	q	**p $\underline{\vee}$ q**
F	V	**?**

Para a operação da disjunção exclusiva de duas proposições, a regra é a seguinte:

Somente uma delas deve ser verdade para que o resultado final da disjunção seja verdade.

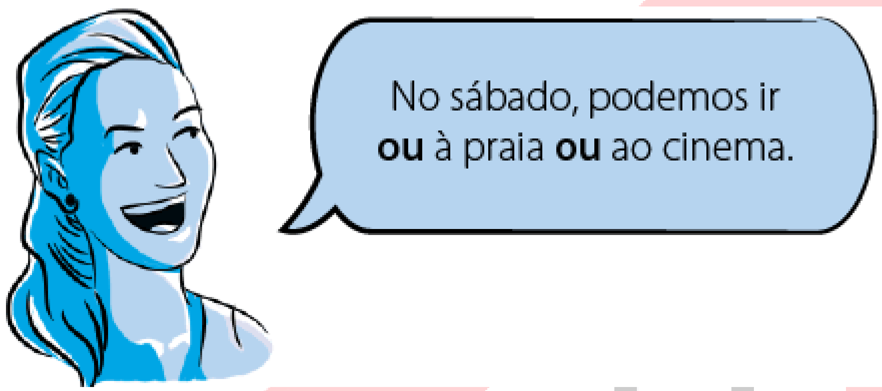
Ou seja:

Rio de Janeiro é a capital do Brasil	Brasília é a capital do Brasil	Rio de Janeiro é a capital do Brasil **ou** a capital é Brasília.
p	q	**p $\underline{\vee}$ q**
F	V	**V**

A inversão também satisfaz à regra, conforme demonstra a tabela abaixo:

Brasília é a capital do Brasil	Rio de Janeiro é a capital do Brasil	Rio de Janeiro é a capital do Brasil **ou** a capital é Brasília.
p	q	**$p \veebar q$**
V	F	**V**

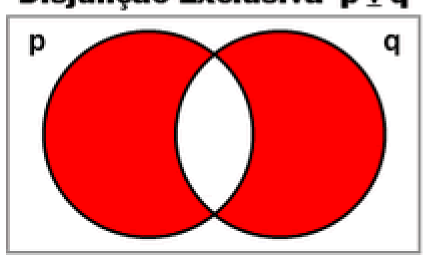
Voltando ao exemplo do diálogo entre pai e filho, mencionado na operação de disjunção, considere agora que o pai quisesse deixar claro ao filho que somente um dos lugares propostos poderia ser escolhido para a programação do sábado. Apoiando-se na lógica das proposições para se expressar, a proposta do pai seria:



Percebe-se a mudança quanto à interpretação da declaração, onde a escolha da praia **exclui** a ida ao cinema no sábado. Por outro lado, não admite que ambos os lugares sejam escolhidos, nem mesmo que os dois lugares sejam descartados. Essa é essência da disjunção exclusiva!

Reforçando o entendimento com teoria dos conjuntos, a disjunção exclusiva é representada por um diagrama similar ao da disjunção, retirando-se apenas a parte onde os elementos atendem simultaneamente aos conjuntos p e q:

Disjunção Exclusiva $p \veebar q$



Sendo
A: $p \cup q$
B: $p \cap q$

Então:
A Disjunção Exclusiva é a Diferença: A-B

16

Resumo

Com o emprego de um ou mais conectivos é possível compor um pensamento novo. Cada conectivo origina uma operação da lógica das proposições e, por sua vez, cada operação possui uma regra própria de interpretação.

Assim, para a interpretação final de uma proposição, deve-se identificar o conectivo em análise e aplicar a respectiva regra. A dica é lembrar a situação que conduz ao resultado V (Verdade) na interação de cada uma das operações.

A tabela abaixo consolida as primeiras operações lógicas estudadas e respectivas regras de obtenção de V (verdade) na análise final da proposição:

Operação Lógica			Quando é verdade?
$p \wedge q$	"e"	Conjunção	Quando ambos são verdade.
$p \vee q$	"ou"	Disjunção	Quando pelo menos um dos dois for verdade.
$p \veebar q$	"ou...ou"	Disjunção exclusiva	Quando apenas um dos dois é verdade.

Unidade I – Estudo de Proposições Lógicas

Módulo 2 – Operações Lógicas com os Conectivos "Se-então", "Se e somente se" e "Não".

01

1 - Operações lógicas

Em continuidade ao estudo das operações lógicas, neste módulo serão estudados dois outros conectivos lógicos: "Se-então" e "se e somente se".

Esses conectivos possibilitam a criação de novas proposições por meio das operações lógicas denominadas como Condicional e Bicondicional, respectivamente identificadas abaixo:

Operação		Conectivo
Operação Condicional	➡	"Se - então"
Operação Bicondicional	➡	"se somente se"

02

2 - Operação Condicional (→)

A operação condicional, simbolizada por "→", está presente em proposições compostas pelo conectivo "se... então...", que expressa a ideia de condição e consequência.

Por exemplo: ***Se** o inventor Santos Dumont nasceu no Brasil, **então** ele é brasileiro.*

p: O inventor Santos Dumont nasceu no Brasil.
q: O Santos Dumont é brasileiro.
R: **Se** o inventor Santos Dumont nasceu no Brasil, **então** ele é brasileiro.

R: p → q

Esse tipo de declaração condiciona a veracidade de q à ocorrência de p. Assim, a interpretação deve ser iniciada pela avaliação do valor lógico da proposição p.

03

Como a proposição R declara uma afirmativa conhecida, pois sabemos que brasileiro é aquele que nasce no Brasil e que Santos Dumont é brasileiro, a análise do valor lógico da proposição R fica facilitada.

Inicie a avaliação refletindo: **Qual é a única possibilidade desta proposição R estar incorreta?**

Haveria apenas uma possibilidade, que seria no caso da primeira parte ser uma verdade e a segunda ser uma falsidade. Ou seja, não faz sentido ocorrer:

Verdade → Falsidade.

Como sabemos que V(p)=V, também sabemos que V(q)=V. Veja abaixo o detalhamento do estudo do valor lógico final:

Sendo
p: O inventor Santos Dumont nasceu no Brasil.

Então o valor lógico de p é verdade:

V(p) = V

Sendo
q: O Santos Dumont é brasileiro.

Então o valor lógico de q é verdade:

V(q) = V

04

Qual é o valor lógico da proposição R, formada pela condicional de p com q?

R: **Se** o inventor Santos Dumont nasceu no Brasil, **então** ele é brasileiro.

O inventor Santos Dumont nasceu no Brasil	O Santos Dumont é brasileiro.	**Se** o inventor Santos Dumont nasceu no Brasil, **então** ele é brasileiro
p	q	$p \rightarrow q$
V	V	**?**

Para a operação da condicional de duas proposições, a regra é a seguinte:

A única possibilidade que não pode ocorrer é uma verdade condicionando uma falsidade, ou seja, Verdade → Falsidade. Nos demais casos, o resultado é verdade.

Retomando ao caso da proposição R, temos o seguinte:

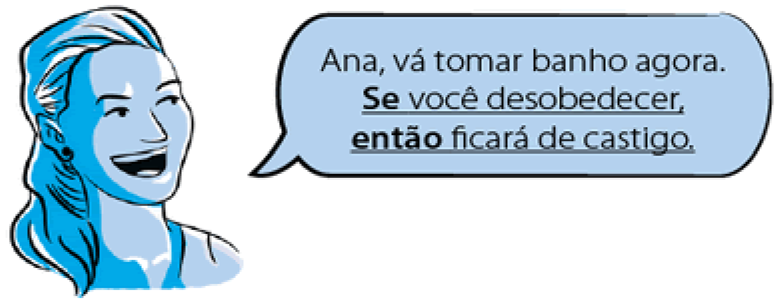
O inventor Santos Dumont nasceu no Brasil	O Santos Dumont é brasileiro.	**Se** o inventor Santos Dumont nasceu no Brasil, **então** ele é brasileiro
p	q	$p \rightarrow q$
V	V	**V**

05

É importante esclarecer que o exemplo "**Se** o inventor Santos Dumont nasceu no Brasil, **então** ele é brasileiro" foi escolhido para fins didáticos, mas não é obrigatório que exista qualquer conexão de sentido entre os fatos declarados pelas proposições componentes da condicional. Por exemplo, poderíamos ter a seguinte sentença:

Se *3 é um número impar,* ***então*** *a terra é plana.*

Por outro lado, exemplos com sentido na linguagem humana auxiliam de forma relevante na assimilação da regra da operação lógica. Por exemplo, imagine que você diga para uma criança:



Bem, pode acontecer tudo, menos a situação onde a criança desobedeça e depois não fique de castigo. Ou seja, a incoerência estará na situação onde:

V → F

Uma vez que a promessa foi:

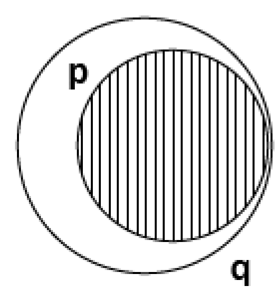
você desobedece → fica de castigo.

Assim é a essência da condicional na lógica das proposições.

06

Apoiando-se nas relações da teoria dos conjuntos, considere os conjuntos p e q a seguir. Quanto à condicional p $\rightarrow$ q, a representação corresponderá à inclusão do conjunto p no conjunto q, demonstrando a relação de dependência que p tem com o q.

Condicional p → q



$p \subset q$
(p está contido em q)

07

3 - Operação Bicondicional (↔)

A operação bicondicional está presente em proposições compostas onde há conectivo "...se e somente se...", simbolicamente representado por "↔", que expressa a ideia de condição bilateral. Por exemplo:

*A lua nasce **se e somente se** o sol se põe.*

p: A lua nasce.
q: O sol se põe.
R: *A lua nasce **se e somente se** o sol se põe.*

R: p ↔ q

Esse tipo de declaração condiciona a veracidade de **q** à ocorrência de **p**, e vice-versa. Assim, a interpretação deve ser bilateral. Diz-se que **p** é condição necessária e suficiente para que **q** ocorra, assim como **q** é condição necessária e suficiente para que **p** ocorra.

08

Como a proposição R declara uma afirmativa de juízo já conhecido, a análise do valor lógico da proposição R fica facilitada.

Sendo
p: A lua nasce.

Então o valor lógico de p é verdade:

V(p) = V

Sendo
q: O sol se põe.

Então o valor lógico de q é verdade:

V(q) = V

Qual é o valor lógico da proposição R, formada pela bicondicional entre p e q? Veja a seguir.

09

R: A lua nasce **se e somente se** o sol se põe.

p: A lua nasce.	q: O sol se põe.	R: A lua nasce **se e somente se o sol se** põe.
p	q	**p ↔ q**
V	V	**?**

Para a operação da bicondicional entre duas proposições, a regra é a seguinte:

> O valor lógico de p tem que ser igual ao valor de q, já que é bilateral a condição de ocorrência dos fatos declarados.

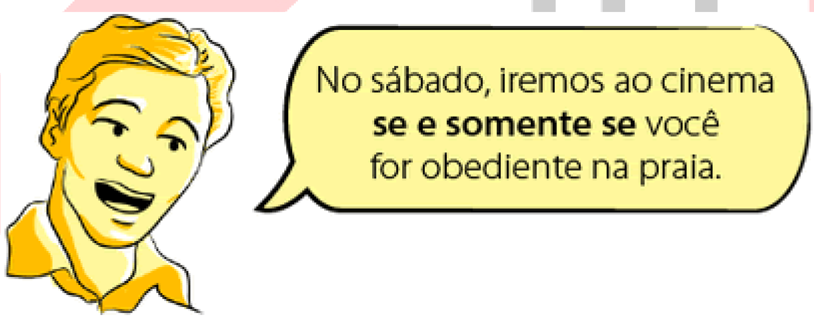
Voltando ao caso da proposição R, temos:

p: A lua nasce.	q: O sol se põe.	R: A lua nasce **se e somente se** o sol **se** põe.
P	q	**p ↔ q**
V	V	**V**

Por outro lado, a lua não nasce enquanto o sol não se pôr, e vice-versa. Assim, está correto afirmar: quando o valor lógico de p for falso, necessariamente o valor lógico de q deverá ser falso, e vice-versa. Ou seja:

p: A lua nasce.	q: O sol se põe.	R: A lua nasce **se e somente se** o sol **se** põe.
P	q	**p ↔ q**
F	F	**V**

Recorrendo ao cotidiano para fixar a regra da bicondicional, imagine que o pai, naquele exemplo do planejamento da programação do sábado, queira estabelecer que só irão ao cinema se o filho tiver bom comportamento na praia. Bastaria declarar:



Ou seja:

Iremos ao cinema ↔ filho obediente na praia

Dessa forma, qualquer criança saberá claramente que filho obediente vai ao cinema e que filho desobediente não vai ao cinema. Assim, as duas únicas situações coerentes seriam:

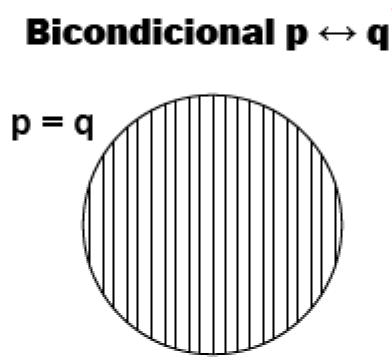
Caso a obediência falhe, a ida ao cinema também falha, ou seja, F↔F é coerente.

Caso a obediência ocorra, a ida ao cinema também ocorre, ou seja, V↔V é coerente.

Nota-se então que é exatamente a mesma interpretação considerada na regra da operação bicondicional.

11

Para representar a bicondicional na relação de conjuntos, o diagrama corresponderá à igualdade dos conjuntos p e q, representando a relação de dependência quanto à igualdade entre os valores dos elementos de p e q:



12

4 - Operação de Negação (~)

A operação de negação de uma proposição é de grande importância e fácil entendimento. A negação está presente em proposições onde o “não” faz parte da sentença. Esta operação lógica é simbolizada por “~” e também por "¬".

Por exemplo:

p: o Brasil foi campeão da copa de 2002.

Negação:

~p: o Brasil **não** foi campeão da copa de 2002.

Assim como a notação, a interpretação do valor lógico também é simples:

Sendo
p: o Brasil foi campeão da copa de 2002.

Então o valor lógico de p é verdade, isto é:

$V(p) = V$

Sendo

~p: o Brasil **não** foi campeão da copa de 2002.

Então o valor lógico de ~p é falso, isto é:

$V(\sim p) = F$

13

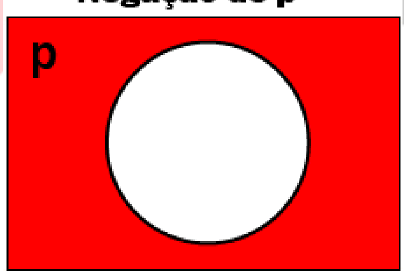
Diante do exposto, nota-se que a regra da operação de negação é a de inversão do valor lógico original da proposição, conforme detalhado a seguir:

O Brasil foi campeão da copa de 2002.	O Brasil **não** foi campeão da copa de 2002.
p	~p
V	F

O Brasil foi campeão da copa de 2006.	O Brasil **não** foi campeão da copa de 2006.
p	~q
F	V

Relacionando com a teoria dos conjuntos, considere um conjunto p qualquer, representa-se facilmente a operação de negação com o diagrama abaixo que, assim como a regra da operação lógica, corresponde ao inverso de p:

Negação de p



~p é a área em vermelho

(~p é o complemento de p)

$\sim p = \hat{p}$

14

Note que **p: o Brasil foi campeão da copa de 2002**, exemplo explorado na explicação da negação, é uma proposição simples. No entanto, é válido mencionar que também é possível aplicar a operação de negação sobre proposições compostas.

Considere então as proposições compostas:

A: Trarei o sanduíche de atum e trarei o suco de laranja.
B: Podemos ir à praia ou ir ao cinema.
C: Podemos ir ou à praia ou ao cinema.
D: Se desobedecer ao horário do banho, então ficará de castigo.
E: Iremos ao cinema se e somente se você for obediente na praia.

Como iniciar a análise da negação dessas proposições compostas?

Antes de atribuir a negação, faremos primeiramente a transcrição simbólica de cada proposição composta, obtendo-se:

A: $p \wedge q$
B: $r \vee s$
C: $r \underline{\vee} s$
D: $x \rightarrow y$
E: $s \leftrightarrow k$

Agora vamos representar simbolicamente a negação de cada proposição composta:

~A: $\sim(p \wedge q)$
~B: $\sim(r \vee s)$
~C: $\sim(r \underline{\vee} s)$
~D: $\sim(x \rightarrow y)$
~E: $\sim(s \leftrightarrow k)$

As transcrições dessas negações em linguagem corrente devem ser feitas por meio do acréscimo do termo “Não é verdade que...”, resultando em:

$\sim A: \sim(p \wedge q)$

~A: Não é verdade que → trarei o sanduíche de atum **e** trarei o suco de laranja.

$\sim B: \sim(r \vee s)$

~B: Não é verdade que → podemos ir à praia **ou** ir ao cinema.

$\sim C: \sim(r \underline{\vee} s)$

~C: Não é verdade que → podemos ir **ou** à praia **ou** ao cinema.

$\sim D: \sim(x \rightarrow y)$

~D: Não é verdade que → **se** desobedecer ao horário do banho, **então** ficará de castigo.

$\sim E: \sim(s \leftrightarrow k)$

~E: Não é verdade que → iremos ao cinema **se e somente se** você for obediente na praia.

16

Para a análise de valor lógico de uma negação de proposição composta, primeiramente deve ser interpretada a operação da ideia principal da sentença e depois é atribuída a negação ao resultado obtido. Por exemplo:

Ideia principal:

$$A: p \wedge q$$

Possibilidades e respectivos resultados de $p \wedge q$

	p	q	**p ∧ q**
Possibilidade 1	V	V	**V**
Possibilidade 2	F	F	**F**
Possibilidade 3	V	F	**F**
Possibilidade 4	F	V	**F**

Negação de A:

~(p ∧ q)

Possibilidades e respectivos resultados da negação de p ∧ q:

	p	q	p ∧ q	**~(p ∧ q)**
Possibilidade 1	V	V	V	**F**
Possibilidade 2	V	V	F	**V**
Possibilidade 3	V	V	F	**V**
Possibilidade 4	V	V	F	**V**

Seguindo esta mesma estrutura de análise aplicada ao estudo de ~A, todas as outras negações podem ser interpretadas para a obtenção das possibilidades de resultados das proposições compostas ~B, ~C, ~D e ~E.

RESUMO

Com o emprego de um ou mais conectivos é possível compor um pensamento novo. Cada conectivo original uma operação da lógica das proposições e, por sua vez, cada operação possui uma regra própria de interpretação. Assim, para a interpretação final de uma proposição, deve-se identificar o conectivo em análise e aplicar a respectiva regra.

Sumarizando o entendimento de cada regra, a tabela a seguir traz a situação que conduz ao resultado V (Verdade) na interpretação das operações lógicas Condicional, Bicondicional e Negação, separadamente:

Operação Lógica				Quando é verdade?
$p \rightarrow q$	"Se-então"	Condicional	Relação de inclusão $p \subset q$	Só é falso quando V→F. É verdade nos demais casos.
$p \leftrightarrow q$	"se e somente se"	Bicondicional	Relação de igualdade $p = q$	Quando p e q possuem valores lógicos iguais.
$\sim p$	"não"	Negação	Relação de complemento (de inverso) $\sim p = \hat{p}$	Quando p é falso.

Para o estudo da lógica das proposições é necessária e obrigatória a compreensão dessas e das demais operações lógicas, que foram consolidadas na tabela abaixo:

Operações Lógicas		Quando é verdade?
$p \wedge q$	Conjunção	Quando ambos são verdade.
$p \vee q$	Disjunção	Quando pelo menos um dos dois for verdade.
$p \veebar q$	Disjunção exclusiva	Quando apenas um dos dois é verdade.
$p \rightarrow q$	Condicional	Só é falso quando $V \rightarrow F$. É verdade nos demais casos.
$p \leftrightarrow q$	Bicondicional	Quando p e q possuem valores lógicos iguais.
$\sim p$	Negação	Quando p é falso.