UNIDADE 3 – IMPLICAÇÃO LÓGICA E EQUIVALÊNCIA LÓGICA – MÉTODOS DA TABELA VERDADE E ALGÉBRICOS

MÓDULO 1 – IMPLICAÇÃO LÓGICA

01

1 - IMPLICAÇÃO LÓGICA PELO MÉTODO DA TABELA VERDADE

Uma proposição qualquer P implica logicamente em outra proposição Q quando, e somente quando, a proposição Q é verdade todas as vezes que P for verdade.

Dessa forma, ao analisar as tabelas verdades de P e Q, não pode ocorrer V no resultado de P e F no resultado de Q, simultaneamente na mesma linha.

A notação de implicação lógica entre as proposições P e Q é a seguinte:

P ⇒ Q
Ou ainda:
P (p, q, r, ...) ⇒ Q (p, q, r, ...)

02

Assim, para verificar a implicação lógica entre as proposições abaixo, constrói-se a tabela verdade de ambas para a comparação do resultado final. Veja um exemplo a seguir.

Verificar a implicação lógica entre:

P: p ∧ q

Q: p ↔ q

1º) Tabela verdade de **P: p ∧ q**

	p	q	p ∧ q
1.	V	V	V
2.	V	F	F
3.	F	V	F
4.	F	F	F

2º) Tabela verdade de **Q: p ↔ q**

© 2014 - AIEC - Associação Internacional de Educação Continuada

	p	q	$p \leftrightarrow q$
1.	V	V	V
2.	V	F	F
3.	F	V	F
4.	F	F	V

03

3º) Comparando-se os resultados das tabelas verdades de P e Q, tem-se:

$p \wedge q$	$p \leftrightarrow q$
V	V
F	F
F	F
F	V

Conclusão:

Analisando as colunas dos resultados das tabelas verdades, na linha em que P obteve o resultado V, simultaneamente a proposição Q obteve também V, conforme requisito da regra de implicação. Logo, afirma-se que **P: $p \wedge q$ implica em Q: $p \leftrightarrow q$**

Assim, diz-se:
$P(p, q, r, \ldots) \Rightarrow Q(p, q, r, \ldots)$.
Ou simplesmente:
$p \wedge q \Rightarrow p \leftrightarrow q$

Uma forma de facilitar a comparação dos resultados é o uso compartilhado das colunas das proposições componentes. Veja a demonstração a seguir:

	p	q	$p \wedge q$	$p \leftrightarrow q$
1.	V	V	V	V
2.	V	F	F	F
3.	F	V	F	F
4.	F	F	F	V

04

2 - Tautologias e Contradições no Conceito de Implicação Lógica

© 2014 - AIEC - Associação Internacional de Educação Continuada

Diz-se que uma proposição P implica em outra proposição Q se não ocorrer simultaneamente os valores V e F nas respectivas colunas de resultado.

Ora, caso as proposição P e Q sejam ambas tautologias, teremos o valor V em todas as linhas de ambos os resultados, eliminado a possibilidade de ocorrer a combinação V e F simultaneamente.

Veja a seguir um exemplo da verificação da implicação de P ⇒ Q, sendo P: p V ~(p∧q) e Q: p∧q ⟶ (p ↔ q), ou seja:

Verificar se

(p V ~(p∧q)) ⇒ (p∧q → (p ↔ q))

Vejamos então se P: p V ~(p∧q) implica em Q: p∧q ⟶ (p ↔ q):

1º) Tabela verdade de **P: p V ~(p ∧ q)**

	p	q	p ∧ q	~(p ∧ p)	p ∨ ~(p ∧ p)
1.	V	V	V	F	V
2.	V	F	F	V	V
3.	F	V	F	V	V
4.	F	F	F	V	V

2 º) Tabela verdade de **Q: p ∧ q → (p ↔ q)**

	p	q	(p ↔ q)	p ∧ q	p ∧ q → (p ↔ q)
1.	V	V	V	V	V
2.	V	F	F	F	V
3.	F	V	F	F	V
4.	F	F	V	F	V

3º) Comparar os resultados das tabelas verdades de P e Q

Ao compararmos os resultados, podemos então afirmar que P implica em Q e também que Q implica em P.

Conclusão:

Pode-se afirmar:
p V ~(p ∧ q) ⇒ p ∧ q ⟶ (p ↔ q)
Bem como:

© 2014 - AIEC - Associação Internacional de Educação Continuada

$p \wedge q \rightarrow (p \leftrightarrow q) \Rightarrow p \vee \sim(p \wedge q)$
Generalizando a análise, nota-se que sempre haverá implicação lógica entre as proposições tautológicas.

06

Seguindo o mesmo princípio, agora comparando duas proposições que são ambas contradições, então teremos o valor F em todas as linhas de ambos os resultados, eliminando também a possibilidade de ocorrer a combinação V e F simultaneamente.

Veja a seguir um exemplo:

Verificar se

P: $((p\wedge q)\wedge\sim(p\vee q)) \Rightarrow$ Q: $(\sim p\wedge(p\wedge\sim q))$

1º) Tabela verdade de P: **$(p\wedge q)\wedge\sim(p\vee q)$**

	p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$
1.	V	V	V	V	F	F
2.	V	F	F	V	F	F
3.	F	V	F	V	F	F
4.	F	F	F	F	V	F

2º) Tabela verdade de **Q: $\sim p\wedge(p\wedge\sim q)$**

	p	q	$\sim q$	$(p \wedge \sim q)$	$\sim p$	$\sim p \wedge (p \wedge \sim q)$
1.	V	V	F	F	F	F
2.	V	F	V	V	F	F
3.	F	V	F	F	V	F
4.	F	F	V	F	V	F

3º) Comparar os resultados das tabelas verdades de P e Q

Comparando os resultados, podemos afirmar que P implica em Q e também que Q implica em P, pois não ocorre "V ⇒ F" simultaneamente na mesma linha.

Conclusão:

Pode-se afirmar:
$(p\wedge q)\wedge\sim(p\vee q) \Rightarrow \sim p\wedge(p\wedge\sim q)$
Bem como:
$\sim p\wedge(p\wedge\sim q) \Rightarrow (p\wedge q)\wedge\sim(p\vee q)$

© 2014 - AIEC - Associação Internacional de Educação Continuada

07

Além dessas interessantes relações entre contradição, tautologia e implicação lógica, apresenta-se agora outra relação:

Toda implicação é uma condicional tautológica

Esta é relação mais importante entre o conceito de tautologia e implicação lógica.

Retornando ao primeiro exemplo de implicação lógica deste módulo, lembre que confirmamos a implicação $p \wedge q \Rightarrow p \leftrightarrow q$ comparando as respectivas tabelas verdades. Relembre abaixo:

$p \wedge q$
V
F
F
F

$p \leftrightarrow q$
V
F
F
V

Aproveitando-se desta importante relação, aprenderemos agora que podemos substituir o sinal de implicação "$\Rightarrow$" por uma operação de condicional "$\rightarrow$" e formar a nova proposição $(p \wedge q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$, cuja tabela verdade deverá ser uma tautologia para confirmar a existência de implicação lógica. Vejamos a seguir:

A	B	
$p \wedge q$	$p \leftrightarrow q$	$A \rightarrow B$
V	V	V
F	F	V
F	F	V
F	V	V

Confirmada a tautologia ao substituir $\Rightarrow$ por $\rightarrow$, comprova-se então a implicação lógica $p \wedge q \Rightarrow p \leftrightarrow q$.

08

A seguir há um caso de verificação de implicação lógica envolvendo proposições que possuem quantidades distintas de proposições componentes:

• Proposições:

© 2014 - AIEC - Associação Internacional de Educação Continuada

p

p ∨ (p ↔ q)

• Tabelas verdades:

	p
1.	V
2.	F

	p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \vee (p \leftrightarrow q)$
1.	V	V	V	V
2.	V	F	F	V
3.	F	V	F	F
4.	F	F	V	V

Em situações assim, onde há tabelas verdades com um número distinto de linhas, o método de substituição da ⇒ por → será ainda mais adequado para a verificação.

Ou seja:

Faz-se a tabela de $p \rightarrow p \vee (p \leftrightarrow q))$ par verificar se o resultado é uma tautologia:

	p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \vee (p \leftrightarrow q)$	$p \rightarrow (p \vee (p \leftrightarrow q))$
1.	V	V	V	V	V
2.	V	F	F	V	V
3.	F	V	F	F	V
4.	F	F	V	V	V

Tautologia comprovada! Logo, implicação lógica também comprovada.

09

3 - A APLICAÇÃO PRÁTICA DE IMPLICAÇÃO LÓGICA

A principal aplicação do conceito de implicação lógica é o estudo dos chamados argumentos lógicos.

São exemplos de argumentos lógicos:

Tudo que respira é um ser vivo. A planta respira. Logo, a planta é um ser vivo. P>Q

© 2014 - AIEC - Associação Internacional de Educação Continuada

Q>R
Logo, P>R

Na estrutura dos argumentos lógicos, as duas primeiras declarações são ditas premissas e a última declaração é a conclusão.

10

Assim, Diz-se:

As declarações apresentadas nas premissas sustentam a conclusão. Diz-se também que as premissas conduzem à dedução da conclusão.

Para que o argumento seja válido, é preciso que as premissas e a conclusão estejam corretamente relacionadas, de tal forma que seja impossível ocorrer premissas verdadeiras e uma conclusão falsa.

Porém, note que:

A validade de um argumento não é garantia da veracidade da conclusão, pois um argumento é também válido se tiver premissas falsas e uma conclusão também falsa.

Veja abaixo um argumento dentro da lógica das proposições:

p → q
p
Logo, q

Ou também representado por:

p → q
p
______
q

11

Este é um argumento válido importante, denominado **regra de inferência Modus Ponens (MP)**, que diz o seguinte:

$p \rightarrow q$	Esta linha declara: se p ocorrer, então q também irá ocorrer.
p	Esta linha declara: ocorreu p.
q	Esta linha então conclui: Logo, ocorreu q também.

© 2014 - AIEC - Associação Internacional de Educação Continuada

Outro argumento válido importante é a denominada regra de inferência **Modus Tollens (MT)**, que declara o seguinte:

$p \to q$	Esta linha declara: se p ocorrer, então q também irá ocorrer.
$\sim q$	Esta linha declara: não ocorreu q.
$\sim p$	Esta linha então conclui: Logo, também não ocorreu p.

Essas e todas as chamadas **regras de inferência** são implicações lógicas comprovadas. Veja a seguir.

12

Observe agora a comprovação da implicação lógica de MP - Modus Ponens:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ p \\ \hline q \end{array}$$

1º) Juntam-se as premissas por meio da conjunção (p ⟶ q) ∧ p.

2º) Verifica-se a implicação de (p ⟶ q) ∧ p ⇒ q.

Ou seja:

	p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$	$((p \to q) \wedge p) \to (q)$
1.	V	V	V	V	V
2.	V	F	F	F	V
3.	F	V	V	F	V
4.	F	F	V	F	V

Tautologia da condicional está comprovada! Logo, a implicação lógica também.

13

Além de MP – Modus Ponens e MT – Modus Tollens, há outras implicações lógicas importantes e também denominadas de regras de inferências:

© 2014 - AIEC - Associação Internacional de Educação Continuada

Regras de Inferência	
Adição disjuntiva (AD)	$p \Rightarrow p \vee q$
Simplificação conjuntiva (SIM)	$p \wedge q \Rightarrow p$ ou $p \wedge q \Rightarrow q$
Modus Ponens(MP)	$(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$
Modus Tollens(MT)	$(p \rightarrow q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$
Silogismo Disjuntivo(SD)	$(p \vee q) \wedge \sim q \Rightarrow p$
Silogismo Hipotético(SH)	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow p \rightarrow r$
Dilema Construtivo(DC)	$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (p \vee r) \Rightarrow q \vee s$
Dilema Destrutivo(DD)	$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (\sim q \vee \sim s) \Rightarrow \sim p \vee \sim r$
Absorção(ABS)	$p \rightarrow q \Rightarrow p \rightarrow (p \rightarrow q)$

Perceba que a conclusão sempre já **está contida** nas premissas. Característica que torna este um estudo relacionado com a teoria dos conjuntos matemáticos.

DESAFIO

Vimos anteriormente a comprovação da implicação lógica de MP - Modus Ponens.

Comprove agora a denominada regra de inferência Modus Tollens (MT), que declara o seguinte:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \sim q \\ \hline \sim p \end{array}$$

Dica:

1º) Junte as premissas por meio da conjunção: $(p \rightarrow q) \wedge \sim q$.
2º) Verifique se a implicação de $(p \rightarrow q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$, usando o teorema que diz que toda implicação lógica é uma condicional tautológica. Ou seja:

© 2014 - AIEC - Associação Internacional de Educação Continuada

	p	q	~p	~q	p → q	(p→q) ∧ ~q	((p→q)∧~q) → (~p)
1.	V	V					
2.	V	F					
3.	F	V					
4.	F	F					

Será realmente uma tautologia a condicional?! ☺

Complete a tabela acima e observe o resultado da última coluna. Se nela forem obtidos apenas valores lógicos “V”, então a implicação lógica de MT estará comprovada!

RESUMO

Implicação Lógica - Uma proposição qualquer P implica logicamente em outra proposição Q quando, e somente quando, a proposição Q é verdade todas as vezes que P for verdade.

Ou seja: ao analisar as tabelas verdades de P e Q, não pode ocorrer V no resultado de P e F no resultado de Q, simultaneamente na mesma linha.

A notação de implicação lógica entre as proposições P e Q é a seguinte:

$P \Rightarrow Q$

Ou ainda:

$P\ (p, q, r, \ldots) \Rightarrow Q\ (p, q, r, \ldots)$

Assim, quando uma proposição implica na outra, escrevemos então:

$P \Rightarrow Q$

Por exemplo:

Verifique se P: $p \land q \Rightarrow$ Q: $p \leftrightarrow q$

	p	q	p ∧ q	p ↔ q
1.	V	V	V	V
2.	V	F	F	F
3.	F	V	F	F
4.	F	F	F	V

© 2014 - AIEC - Associação Internacional de Educação Continuada

16

Comparando-se os resultados finais de P e Q, percebe-se que não houve a ocorrência de V ⇒ F na mesma linha. Veja a seguir:

$p \wedge q$		$p \leftrightarrow q$
V	$\Rightarrow$	V
F	$\Rightarrow$	F
F	$\Rightarrow$	F
F	$\Rightarrow$	V

Lembre-se também que, segundo o Teorema, a proposição P implica na proposição Q (isto é, P ⇒ Q), se e somente se a condicional P ⟶ Q for tautológica.

Vale ressaltar que os símbolos ⟶ e ⇒ são distintos. O símbolo ⟶ representa uma operação lógica, enquanto que ⇒ indica uma relação que estabelece que a implicação lógica e estabelece que a condicional é tautológica. Veja:

			A	B	Teorema
	p	q	$p \wedge q$	$p \leftrightarrow q$	$A \rightarrow B$
1.	V	V	V	V	**V**
2.	V	F	F	F	**V**
3.	F	V	F	F	**V**
4.	F	F	F	V	**V**

Unidade 3 – Implicação Lógica e Equivalência Lógica – Métodos da Tabela Verdade e Algébricos

Módulo 2 – Equivalência Lógica

01

1 - Equivalência Lógica pelo método da tabela verdade

Tem-se uma equivalência lógica entre duas proposições quando ambas produzem o mesmo resultado na tabela verdade.

Dessa forma, uma proposição P é dita equivalente à proposição Q quando os resultados das respectivas tabelas são idênticos.

© 2014 - AIEC - Associação Internacional de Educação Continuada

A notação de equivalência lógica entre as proposições P e Q é a seguinte:

$$P \Leftrightarrow Q$$
Ou ainda:
$$P\ (p, q, r, \ldots) \Leftrightarrow Q\ (p, q, r, \ldots)$$

Por exemplo, para verificar se as proposições $P: p \rightarrow (q \rightarrow r)$ e $Q: (p \wedge q) \rightarrow r$ são logicamente equivalentes entre si, constrói-se as tabelas verdades de ambas para a comparação do resultado final. Veja a seguir.

02

Vamos então verificar a equivalência lógica entre:

P: $p \rightarrow (q \rightarrow r)$
Q: $(p \wedge q) \rightarrow r$

Tabela verdade de P: $p \rightarrow (q \rightarrow r)$

	p	q	r	$(q \rightarrow r)$	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$
1.	V	V	V	V	V
2.	V	V	F	F	F
3.	V	F	V	V	V
4.	V	F	F	V	V
5.	F	V	V	V	V
6.	F	V	F	F	V
7.	F	F	V	V	V
8.	F	F	F	V	V

Tabela verdade de Q: $(p \wedge q) \rightarrow r$

	p	q	r	$(p \wedge q)$	$(p \wedge q) \rightarrow r$
1.	V	V	V	V	V
2.	V	V	F	V	F
3.	V	F	V	F	V
4.	V	F	F	F	V
5.	F	V	V	F	V
6.	F	V	F	F	V
7.	F	F	V	F	V
8.	F	F	F	V	V

03

Comparando-se os resultados das tabelas verdades de P e Q, tem-se:

© 2014 - AIEC - Associação Internacional de Educação Continuada

$p \to (q \to r)$	$(p \land q) \to r$
V	V
F	F
V	V
V	V
V	V
V	V
V	V
V	V

Conclusão:

São equivalentes entre si as proposições P:p⟶(q⟶r) e Q:(p∧q)⟶r, devido à igualdade de resultados das respectivas tabelas verdades.

Assim, pode-se afirmar:
P (p, q, r, ...) ⇔ Q (p, q, r, ...).
Ou simplesmente:
p⟶(q⟶r)⇔(p∧q)⟶r

04

É importante notar:

As distribuições de valores lógicos das colunas das proposições componentes são iguais entre si. Este recurso possibilita compararmos as respectivas colunas de resultados.

Veja abaixo as colunas de p, q e r de ambas as tabelas. Comparando linha a linha, notará que todas estão com combinações valores idênticas. Por exemplo, a combinação V V V V da linha 1 de P é igual a da linha 1 de Q, conforme ocorre até a última linha 8.

Tabela verdade de P: p ⟶ (q ⟶ r)

	p	q	r
1.	V	V	V
2.	V	V	F
3.	V	F	V
4.	V	F	F
5.	F	V	V
6.	F	V	F
7.	F	F	V
8.	F	F	F

© 2014 - AIEC - Associação Internacional de Educação Continuada

Tabela verdade de Q: (p ∧ q) → r

	p	q	r
1.	V	V	V
2.	V	V	F
3.	V	F	V
4.	V	F	F
5.	F	V	V
6.	F	V	F
7.	F	F	V
8.	F	F	F

05

Também é importante notar que:

P e Q possuem o mesmo numero de linhas nas tabelas verdades. Isso ocorre pelo fato de terem o mesmo número de proposições componentes.

Assim, uma forma de facilitar a comparação dos resultados é usar as colunas de p, q e r de forma compartilhada, conforme demonstrado a seguir.

				P		Q	
	p	q	r	$(q \to r)$	$p \to (q \to r)$	$(p \wedge q)$	$(p \wedge q) \to r$
1.	V	V	V	V	V	V	V
2.	V	V	F	F	F	V	F
3.	V	F	V	V	V	F	V
4.	V	F	F	V	V	F	V
5.	F	V	V	V	V	F	V
6.	F	V	F	F	V	F	V
7.	F	F	V	V	V	F	V
8.	F	F	F	V	V	V	V

06

2 - Tautologias e Contradições no conceito de Equivalência Lógica

Considere as duas proposições compostas, P e Q, que são ambas tautologias:

P: p ∨ ~(p ∧ q)

© 2014 - AIEC - Associação Internacional de Educação Continuada

	p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$p \vee \sim(p \wedge q)$
1.	V	V	V	F	V
2.	V	F	F	V	V
3.	F	V	F	V	V
4.	F	F	F	V	V

Q: $p \wedge q \rightarrow (p \leftrightarrow q)$

	p	q	$(p \leftrightarrow q)$	$p \wedge q$	$p \wedge q \rightarrow (p \leftrightarrow q)$
1.	V	V	V	V	V
2.	V	F	F	F	V
3.	F	V	F	F	V
4.	F	F	V	F	V

Ora, se os resultados das tabelas verdades de P e Q são iguais, podemos afirmar que são **equivalentes logicamente**. Dessa forma, generalizando, nota-se que as proposições tautológicas são também equivalentes entre si.

Conclusão:

Pode-se afirmar a equivalência $p \vee \sim(p \wedge q) \Leftrightarrow p \wedge q \rightarrow (p \leftrightarrow q)$

07

Seguindo o mesmo princípio, sendo que agora para proposição que sejam ambas contradições, então é possível afirmar que são equivalentes entre si. Observe novamente que possuem tabelas verdades com o mesmo número de linhas e combinações de valores p e q coincidentes, linha a linha.

P: $(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$

	p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$
1.	V	V	V	V	F	F
2.	V	F	F	V	F	F
3.	F	V	F	V	F	F
4.	F	F	F	F	V	F

Q: $\sim p \wedge (p \wedge \sim q)$

	p	q	$\sim q$	$(p \wedge \sim q)$	$\sim p$	$\sim p \wedge (p \wedge \sim q)$
1.	V	V	F	F	F	F
2.	V	F	V	V	F	F
3.	F	V	F	F	V	F
4.	F	F	V	F	V	F

© 2014 - AIEC - Associação Internacional de Educação Continuada

Conclusão:

Pode-se afirmar a equivalência (p∧q)∧~(p∨q) ⇔ ~p∧(p∧~q)

08

Agora vamos estudar a relação mais importante entre o conceito de tautologia e a equivalência lógica, que é:

Toda equivalência é uma bicondicional tautológica

Resgatando o primeiro exemplo de equivalência lógica deste módulo, vamos lembrar que ao comparar as respectivas tabelas confirmamos a equivalência:

p→(q→r) ⇔ (p∧q)→r

Ou seja, comparamos as colunas de resultado das duas tabelas:

p→(q→r)	⇔	(p∧q)→r
V		V
F		F
V		V
V		V
V		V
V		V
V		V
V		V

09

No entanto, aprendemos agora que poderíamos substituir o sinal de equivalência “⇔” por uma operação de bicondicional “↔”, obtendo uma nova proposição, cuja tabela verdade deverá ser uma tautologia. Ou seja:

Equivalência a ser verificada:
p→(q→r) ↔ (p∧q)→r

Substituição de “⇔” por uma bicondicional “↔”:

(p→(q→r))↔((p∧q)→r)

Confira a seguir este novo método de verificação de equivalência. Veja que, ao substituir ? por ?, o resultado da tabela verdade de (p→(q→r))↔((p∧q)→r) é uma tautologia:

© 2014 - AIEC - Associação Internacional de Educação Continuada

A	B	
$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$(p \wedge q) \rightarrow r$	$A \leftrightarrow B$
V	V	V
F	F	V
V	V	V
V	V	V
V	V	V
V	V	V
V	V	V
V	V	V

Este é um teorema de grande importância. Posteriormente exploraremos o estudo das equivalências lógicas notáveis.

10

Considere agora o estudo de equivalência entre sentenças que possuem quantidades distintas de proposições componentes.

Por exemplo, caso nos seja solicitado verificar se são equivalentes as proposições: **p** e **p$\vee$(p$\wedge$q)**

Pelo método tradicional de comprovação de equivalência, temos que fazer as duas tabelas verdades, que são:

	p
1.	V
2.	F

	p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$
1.	V	V	V	V
2.	V	F	F	V
3.	F	V	F	F
4.	F	F	F	F

Mas como comparar uma tabela que tem 2 linhas a outra com 4 linhas?

Uma solução é buscar a confirmação do teorema que diz que **toda equivalência é uma bicondicional tautológica**. Ou seja, faz-se a tabela de $p \leftrightarrow (p \vee (p \wedge q))$ para verificar se o resultado é uma tautologia:

© 2014 - AIEC - Associação Internacional de Educação Continuada

	p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$	$p \leftrightarrow (p \vee (p \wedge q))$
1.	V	V	V	V	V
2.	V	F	F	V	V
3.	F	V	F	F	V
4.	F	F	F	F	V

Tautologia comprovada! Logo, a equivalência lógica também está comprovada.

11

3 - A APLICAÇÃO PRÁTICA DE EQUIVALÊNCIA LÓGICA

Algumas equivalências lógicas são tão relevantes, que são denominadas equivalências notáveis, que são equivalências utilizadas na prática da simplificação de proposições.

A simplificação de proposições lógicas é a possibilidade de se obter uma proposição mais reduzida que seja equivalente a uma proposição maior e mais complexa.

Diante do estudado até o momento, nota-se que quanto maior é a proposição composta, maior será a respectiva tabela verdade, dificultando assim a interpretação do pensamento declarado pela proposição em análise, assim como dificulta a verificação da equivalência lógica.

Imagine ter que usar o método de tabela verdade para verificar se duas complexas proposições são equivalentes! Ou para interpretar uma proposição com muitas operações lógicas e muitas proposições componentes!

Certamente será grande o risco de erro durante a resolução via tabela verdade, apresentando grande possibilidade de engano na aplicação da ordem de precedência, bem como, na aplicação das regras das operações lógicas.

12

Note então que a redução da quantidade de conectivos e de proposições componentes facilitaria o alcance do objetivo final.

Por este motivo, além do método via tabela verdade, há também o método **dedutivo** para a comprovação de equivalências lógicas entre proposições, onde se utiliza a simplificação e redução de conectivos das proposições.

O método dedutivo é um método algébrico, que, de forma similar à matemática convencional, possui propriedades e regras que aplicamos à proposição para obter nova proposição, equivalente logicamente à proposição original.

© 2014 - AIEC - Associação Internacional de Educação Continuada

Considere, por exemplo, que seja solicitada a verificação de equivalência lógica de $\sim(p\leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p\wedge\sim q) \vee (\sim p\wedge q)$ pelo método dedutivo, ao invés do método via tabela verdade.

O método dedutivo será detalhado ainda nesta Unidade, porém abaixo há uma breve demonstração, para auxiliar na compreensão da importância da simplificação e da redução de proposições lógicas:

$$\mathbf{\sim(p\leftrightarrow q)}$$
$$\sim((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p))$$
$$\sim((\sim p\vee q)\wedge(\sim q\vee p))$$
$$\sim(\sim p\vee q) \vee \sim(\sim q\vee p)$$
$$(\sim\sim p\wedge\sim q)\vee(\sim\sim q\wedge\sim p)$$
$$(p\wedge\sim q)\vee(q\wedge\sim p)$$
$$\mathbf{(p\wedge\sim q)\vee(\sim p\wedge q)}$$

Lembrando que o objetivo era verificar $\sim(p\leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p\wedge\sim q)\vee(\sim p\wedge q)$, pelo método dedutivo o mesmo foi alcançado em 5 linhas de resolução entre a proposição original $\sim(p\leftrightarrow q)$ e a final $(p\wedge\sim q)\vee(\sim p\wedge q)$, conforme ilustrado no quadro acima. Por outro lado, se fosse utilizado o método da tabela verdade, teríamos 4 linhas de resolução, uma linha de cabeçalho e ainda as colunas de cada operação lógica.

Dessa forma, fica fácil perceber que o método dedutivo pode ser mais rápido e simples que o método da tabela verdade. Mais adiante, detalharemos este método e suas equivalências notáveis.

DESAFIO

Na Unidade anterior vimos que a proposição p?q é na verdade uma notação simplificada da proposição $(\sim p\wedge q)\vee(p\wedge\sim q)$.

Ou seja, $p\underline{\vee}q$ e $(\sim p\wedge q)\vee(p\wedge\sim q)$ são equivalentes entre si.

Será que são mesmo?! ☺

Faça então a tabela verdade para comprovar esta importante equivalência.

Sendo,

© 2014 - AIEC - Associação Internacional de Educação Continuada

X(p,q): $p \veebar q$

Z(p,q): $(\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$

Comprove:

$X(p,q) \Leftrightarrow Z(p,q)$

Ou seja:

$p \veebar q \Leftrightarrow (\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$

Dica:

Faça esta verificação por meio da comprovação do Teorema que diz que toda equivalência é uma bicondicional tautológica e construa uma única tabela, compartilhando os valores das componentes p e q.

Ou seja, é tautológica esta bicondicional $(p \veebar q) \leftrightarrow ((\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q))$?

Para verificar, dê continuidade à resolução abaixo:

	p	q	~p	~q	$p \veebar q$	$\sim p \wedge q$	$\sim p \wedge q$	$(\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$	$(p \veebar q) \leftrightarrow ((\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q))$
1.	V	V							
2.	V	F							
3.	F	V							
4.	F	F							

Se a última coluna obtiver somente valores V como resultado, então a equivalência estará comprovada! Ok?!

RESUMO

Equivalência Lógica - diz-se que uma proposição P é logicamente equivalente a uma proposição Q, se as tabelas verdade destas duas proposições são idênticas.

Assim, quando as proposições P e Q são ditas equivalentes, então escrevemos: $P \Leftrightarrow Q$

Por exemplo:

P: $p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow$ Q: $(p \wedge q) \rightarrow r$

© 2014 - AIEC - Associação Internacional de Educação Continuada

				P		Q	
	p	q	r	(q→r)	p→(q→r)	(p ∧ q)	(p ∧ q)→r
1.	V	V	V	V	V	V	V
2.	V	V	F	F	F	V	F
3.	V	F	V	V	V	F	V
4.	V	F	F	V	V	F	V
5.	F	V	V	V	V	F	V
6.	F	V	F	F	V	F	V
7.	F	F	V	V	V	F	V
8.	F	F	F	V	V	V	V

Lembre-se também que, segundo o Teorema, a proposição P é equivalente à proposição Q (isto é, P ⇔ Q), se e somente se a bicondicional P ↔ Q for tautológica.

Vale ressaltar que os símbolos ↔ e ⇔ são distintos. O símbolo ↔ representa uma operação lógica, enquanto que ⇔ indica uma relação que estabelece que a equivalência e que a bicondicional é tautológica. Veja:

				A	B	Teorema
	p	q	r	p → (q→r)	(p ∧ q) → r	A→B
1.	V	V	V	V	V	V
2.	V	V	F	F	F	V
3.	V	F	V	V	V	V
4.	V	F	F	V	V	V
5.	F	V	V	V	V	V
6.	F	V	F	V	V	V
7.	F	F	V	V	V	V
8.	F	F	F	V	V	V

Unidade 3 – Implicação Lógica e Equivalência Lógica – Métodos da Tabela Verdade e Algébricos
Módulo 3 – Equivalências Notáveis e o Método Dedutivo

01

1 - As Regras das Equivalências Notáveis

Algumas equivalências lógicas entre proposições são muito importantes para a aplicação prática deste assunto na informática, conforme detalharemos na outra Unidade.

Quanto maior a proposição composta, maior será a respectiva tabela verdade e maior será a possibilidade na ordem de precedência, bem como na aplicação das regras das operações lógicas.

© 2014 - AIEC - Associação Internacional de Educação Continuada

Sendo assim, algumas comprovações de equivalência são praticadas pelo método Dedutivo, que estudaremos neste módulo.

O método dedutivo é um método algébrico, que, de forma similar à matemática convencional, possui propriedades e regras que aplicamos à proposição para obter nova proposição, equivalente logicamente à proposição original.

Exemplo: verifique a equivalência lógica entre as seguintes proposições abaixo.

$p \to (p \to r)$

$\sim p \vee r$

Já sabemos como verificar pelo método da tabela verdade, mas como seria pelo método dedutivo?

02

O método dedutivo é demonstrado abaixo, apenas para efeito ilustrativo, por enquanto, pois mais à frente será explicado em detalhes:

$$\mathbf{p \to (p \to r)}$$
$$\sim p \vee (p \to r)$$
$$\sim p \vee (\sim p \vee r)$$
$$\sim p \vee \sim p \vee r$$
$$\sim p \vee r$$

Bem, vamos entender o quadro acima:

Partiu-se de uma proposição ($p \to (p \to r)$) e obteve-se a outra ($\sim p \vee r$) via método dedutivo, comprovando assim a equivalência lógica:

$p \to (p \to r) \Leftrightarrow \sim p \vee r$

Veja abaixo como seria mais trabalhosa e arriscada a comprovação pelo método da tabela verdade:

					A	B	Teorema
	p	r	~p	$p \to r$	$p \to (p \to r)$	$\sim p \vee r$	$A \leftrightarrow B$
1.	V	V	F	V	V	V	**V**
2.	V	F	F	F	F	F	**V**
3.	F	V	V	V	V	V	**V**
4.	F	F	V	V	V	V	**V**

Note que o método dedutivo pode ser mais rápido que o método da tabela verdade.

© 2014 - AIEC - Associação Internacional de Educação Continuada

Para a aplicação do método dedutivo, é necessário domínio sobre as regras listadas a seguir, que são equivalências importantes da álgebra das proposições.

03

2 - Verificação de $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \sim q) \Leftrightarrow \sim p$

Vamos agora exercitar a verificação de equivalências pelo método dedutivo, aplicando as regras das equivalências notáveis.

Verifique se as proposições $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \sim q)$ e $\sim p$ são equivalentes:

INÍCIO

1. $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \sim q)$

2. Aplique a regra da condicional dentro dos parênteses da proposição da linha 1, e obtenha:
   $(\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$

3. Aplique a distributiva da disjunção na linha 2 e obtenha:
   $\sim p \vee (q \wedge \sim q)$

4. Aplique a regra de identidade no parêntese na linha 3 e obtenha:
   $\sim p \vee c$

Lembre-se de que **c** é uma contradição, ou seja, seu valor é falso. Aplique então a regra de identidade na linha 4 e obtenha $\sim p$ (pois, qualquer proposição em disjunção com uma falsidade será ela própria):

$\sim p$

Conclusão:

Como foi possível partir de $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \sim q)$ e, após a aplicação das regras, obter $\sim p$ ao final, pode-se então afirmar que a equivalência $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \sim q) \Leftrightarrow \sim p$ é válida, comprovadamente via método dedutivo.

04

3 - Verificação de $p \vee q \rightarrow q \Leftrightarrow p \rightarrow q$

© 2014 - AIEC - Associação Internacional de Educação Continuada

INÍCIO

1. $p \vee q \rightarrow q$

2. Aplique a regra da condicional na linha 1 e obtenha:

   $\sim(p \vee q) \vee q$

3. Aplique MORGAN no parêntese na linha 2 e obtenha:

   $(\sim p \vee \sim q) \vee q$

4. Aplique a distributiva da disjunção na linha 3 e obtenha:

   $(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee q)$

5. Aplique a regra de identidade no segundo parêntese na linha 4 e obtenha:

   $(\sim p \vee q) \wedge t$

6. Lembre-se de que **t** é uma tautologia, ou seja, seu valor é verdade. Aplique então a regra de identidade na linha 5 e obtenha $\sim p \vee q$ (pois qualquer proposição em conjunção com uma verdade será ela própria):

   $\sim p \vee q$

7. Aplique regra da condicional e obtenha:

   $p \rightarrow q$

Uma proposição qualquer P implica logicamente em outra proposição Q quando, e somente quando, a proposição Q é verdade todas as vezes que P for verdade.

Dessa forma, ao analisar as tabelas verdades de P e Q, não pode ocorrer V no resultado de P e F no resultado de Q, simultaneamente na mesma linha.

A notação de implicação lógica entre as proposições P e Q é a seguinte:

Novamente, equivalência foi comprovada via método dedutivo, podendo-se afirmar que $p \vee q \rightarrow q \Leftrightarrow p \rightarrow q$.

05

4 - VERIFICAÇÃO DE (P→R) Λ (Q→R) E PVQ→ R

Verifique se as proposições $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$ e $p \vee q \rightarrow r$ são equivalentes:

© 2014 - AIEC - Associação Internacional de Educação Continuada

INÍCIO

1. $(p \to r) \wedge (q \to r)$
2. Aplique a regra da condicional dentro dos parênteses da linha 1 e obtenha:
   $(\sim p \vee r) \wedge (\sim q \vee r)$
3. Aplique a distributiva da disjunção na linha 2 e obtenha:
   $(\sim p \vee \sim q) \vee r$
4. Aplique MORGAN no parêntese da linha 3 e obtenha:
   $(p \vee q) \vee r$
5. Aplique regra da condicional na linha 4 e obtenha:
   $(p \vee q) \to r$

Assim, a equivalência $(p \to r) \wedge (q \to r)$ e $p \vee q \to r$ comprovada via método dedutivo.

06

5 - VERIFICAÇÃO DE $\sim P \Leftrightarrow P \downarrow Q$

INÍCIO

1. $\sim p$
2. Aplique a regra da idempotência da conjunção na linha 1 e obtenha:
   $\sim p \wedge \sim p$
3. Aplique a regra da negação conjunta na linha 2 e obtenha:
   $p \downarrow p$

Equivalência $\sim p \Leftrightarrow p \downarrow q$ comprovada via método dedutivo.

07

6 - VERIFICAÇÃO DE $(P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \sim R) \vee (P \wedge \sim Q) \Leftrightarrow P$

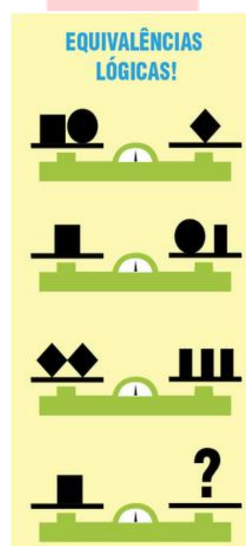
© 2014 - AIEC - Associação Internacional de Educação Continuada

INÍCIO

1. $(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \sim r) \vee (p \wedge \sim q)$
2. Aplique a regra da distributiva na linha 1 e obtenha:
   $p \wedge ((q \wedge r) \vee \sim r \vee \sim q))$
3. Aplique a regra da distributiva entre $(q \wedge r) \vee \sim r$ na linha 2 e obtenha:
   $p \wedge (((q \vee \sim r) \wedge (r \vee \sim r)) \vee \sim q)$
4. Aplique a regra da identidade na linha 3 e obtenha:
   $p \wedge (((q \vee \sim r) \wedge t) \vee \sim q)$
5. Aplique a regra de identidade na linha 4 e obtenha:
   $p \wedge ((q \vee \sim r) \vee \sim q))$
6. Aplique a regra da associativa dentro dos parênteses na linha 5 e obtenha:
   $p \wedge ((q \vee \sim q) \vee \sim r))$
7. Aplique a regra da identidade na linha 6 e obtenha:
   $p \wedge (t \vee \sim r))$
8. Aplique a regra da identidade na linha 7 e obtenha:
   $p \wedge (t)$
9. Aplique regra da identidade na linha 8 e obtenha:
   P

Equivalência $(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \sim r) \vee (p \wedge \sim q) \Leftrightarrow p$ comprovada via método dedutivo.

DESAFIO



Via método dedutivo, vimos a demonstração da equivalência das proposições $(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \sim r) \vee (p \wedge \sim q) \Leftrightarrow p$, mas agora experimente fazer a "prova dos nove" verificando a equivalência via tabela verdade.

Quer uma dica? Então veja por onde começar:

Faça esta verificação por meio da comprovação do Teorema, que diz que toda equivalência é uma bicondicional tautológica, e construa uma única tabela, compartilhando os valores das componentes p, q e r.

Ou seja, a "prova dos nove" é verificar se realmente é uma tautologia a bicondicional $(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \sim r) \vee (p \wedge \sim q) \leftrightarrow p$.

© 2014 - AIEC - Associação Internacional de Educação Continuada

Abaixo você tem uma ajudinha. Complete a tabela a seguir e veja se na última coluna serão obtidos apenas valores V.Ok?!

09

RESUMO

Quanto maior a proposição, mais complexo será o processo de resolução via tabela verdade, potencializando assim as dificuldades quanto à aplicação das regras das operações lógicas e da ordem de precedência.

Desta forma, o chamado método dedutivo pode ser mais rápido que o método da tabela verdade.

O método dedutivo é um método algébrico, que, de forma similar à matemática convencional, possui propriedades e regras que aplicamos à proposição para obter nova proposição, equivalente logicamente à proposição original.

Para a aplicação do método dedutivo, é necessário o domínio sobre as regras denominadas equivalências notáveis, que são importantes equivalências da álgebra das proposições.

10

Por exemplo, vamos demonstrar, via método dedutivo, a verificação da equivalência lógica entre as seguintes proposições $p \to (p \to r)$ e $\sim p \lor r$.

Início

1. $\boxed{p \to (p \to r)}$

Aplique a regra da condicional na linha 1 e obtenha:

2. $\sim p \lor (p \to r)$

Aplique a regra da condicional dentro dos parênteses na linha 2 e obtenha:

3. $\sim p \lor (\sim p \lor r)$

Aplique a regra da associativa na linha 3 e obtenha:

4. $(\sim p \lor \sim p) \lor r$

© 2014 - AIEC - Associação Internacional de Educação Continuada

Aplique a regra da idempotência na linha 4 e obtenha:

~p ∨ r

Comprovada a equivalência lógica p → (p → r) ⇔ ~p ∨ r, pois partimos da proposição p → (p → r) e conseguimos chegar até a proposição ~p ∨ r, via método dedutivo. Podemos então afirmar que:
p → (p → r) ⇔ ~p ∨ r

UNIDADE 3 – IMPLICAÇÃO LÓGICA E EQUIVALÊNCIA LÓGICA – MÉTODOS DA TABELA VERDADE E ALGÉBRICOS
MÓDULO 4 – A SIMPLIFICAÇÃO E A REDUÇÃO DE CONECTIVOS

01

1 - REDUÇÃO DE PROPOSIÇÕES E CONECTIVOS

Além da comprovação de equivalências lógicas via método dedutivo, as regras notáveis também dão suporte à obtenção de proposições mais simples, de menor tamanho e, consequentemente, com um número menor de conectivos.

A equivalência lógica abaixo é um excelente exemplo de como o método dedutivo possibilita a obtenção de uma proposição de menor tamanho:

(p ∧ q ∧ r)∨(p∧~r) ∨ (p ∧~q) ⇔ p

Veja a resolução:

© 2014 - AIEC - Associação Internacional de Educação Continuada

1. $(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \sim r) \vee (p \wedge \sim q)$
2. Aplique a regra da distributiva na linha 1 e obtenha:

   $p \wedge((q \wedge r) \vee \sim r \ \vee \sim q))$
3. Aplique a regra da distributiva entre $(q \wedge r)\vee\sim r$ na linha 2 e obtenha:

   $p \wedge(((q\vee \sim r) \wedge (r \vee\sim r)) \ \vee \sim q)$
4. Aplique a regra da identidade na linha 3 e obtenha:

   $p \wedge(((q\vee \sim r) \wedge t) \ \vee \sim q)$
5. Aplique a regra de identidade na linha 4 e obtenha:

   $p \wedge((q\vee \sim r) \ \vee \sim q))$
6. Aplique a regra da associativa dentro dos parênteses na linha 5 e obtenha:

   $p \wedge((q\vee\sim q) \ \vee \sim r))$
7. Aplique a regra da idempotência na linha 6 e obtenha:

   $p \wedge(t \ \vee \sim r))$
8. Aplique a regra da identidade na linha 7 e obtenha:

   $p \wedge(t)$
9. Aplique regra da identidade na linha 8 e obtenha:

   $\boxed{P}$

São diversas as vantagens de se trabalhar com uma proposição reduzida, tendo a certeza de que a mesma é equivalente à proposição original.

Considere ter que fazer uma tabela verdade de uma proposição. Certamente é menor o trabalho e a possibilidades de erro quando a proposição é pequena. Veja abaixo a complexidade da tabela verdade de (p∧q∧r)∨(p∧~r)∨(p∧~q), que não está totalmente preenchida devido fazer parte do desafio do módulo anterior.

							A	B	C	D	C ∨ D
	p	Q	r	~r	~q	p ∧ q	p ∧ q ∧ r	p ∧ ~r	A ∨ B	p ∧ ~q	(p ∧ q ∧ r) ∨ (p ∧ ~r) ∨ (p ∧ ~q)
1.	**V**	V	V								**V**
2.	**V**	V	F								**V**
3.	**V**	F	V								**V**
4.	**V**	F	F								**V**
5.	**F**	V	V								**F**
6.	**F**	V	F								**F**
7.	**F**	F	V								**F**
8.	**F**	F	F								**F**

Por outro lado, construir uma tabela verdade da proposição p seria bem mais simples que a tabela de (p∧q∧r)∨(p∧~r)∨(p∧~q), sendo que sabemos que essas duas proposições são logicamente equivalentes.

© 2014 - AIEC - Associação Internacional de Educação Continuada

Além disso, mais à frente, na próxima unidade, será também estudada a relação da lógica das proposições com a o projeto de circuitos lógicos, onde a utilização de proposições simplificadas também se apresenta como notória vantagem.

Sendo assim, devemos intensificar o entendimento da aplicação das regras de equivalências notáveis na obtenção de proposições simplificadas.

03

2 - Simplificação de proposições pela redução de conectivos

• **Proposição ~(~p ∨ ~q)**

Vamos simplificar ao máximo a proposição ~(~p ∨ ~q) e obter uma proposição equivalente com o menor numero de conectivo possível:

INÍCIO

1. ~(~p ∨~q)

2. Aplique MORGAN no parêntese e obtenha:

   ~~p ∧~~q

3. Aplique a regra de dupla negação e obtenha:

   $\boxed{p \wedge q}$

A simplificação reduziu a proposição original, que tinha 4 conectivos, para uma equivalente com apenas 1 conectivo.

04

• **Proposição ~(p ∧ ~q) ∧ ~(~p ∧ q)**

Vejamos a simplificação da proposição ~(p ∧ ~q) ∧ ~(~p ∧ q). Vale ressaltar a necessidade de atenção na aplicação das regras garantindo a obtenção de uma proposição na realidade equivalente, em especial quando o objetivo é encontrar uma equivalente com o menor numero de conectivo possível:

A simplificação reduziu a proposição original, que tinha 7 conectivos, para uma equivalente com apenas 1 conectivo.

© 2014 - AIEC - Associação Internacional de Educação Continuada

INÍCIO

1. $\sim(p \wedge \sim q) \wedge \sim(\sim p \wedge q)$
2. Aplique MORGAN nos parênteses e obtenha:

   $(\sim p \vee \sim\sim q) \wedge (\sim\sim p \vee \sim q)$
3. Aplique a regra de dupla negação e obtenha:

   $(\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$
4. Aplique a regra comutativa no segundo parêntese e obtenha:

   $(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$
5. Aplique a regra da condicional e obtenha:

   $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
6. Por fim, aplique a regra da bicondicional e obtenha:

   $\boxed{p \leftrightarrow q}$

05

• **Proposição (p∧q)∧q**

A simplificação pode ser direcionada a um objetivo declarado. Por exemplo, considere o pedido: Simplifique a proposição (p∧q)∧q para obter uma proposição que se exprima em função do conectivo "∨".

INÍCIO

1. $(p \rightarrow q) \rightarrow q$
2. Aplique a regra da condicional e obtenha:

   $\sim(\sim p \vee q) \vee q$
3. Aplique MORGAN e obtenha:

   $(p \wedge \sim q) \vee q$
4. Aplique a distributiva e obtenha:

   $(p \vee q) \wedge (\sim q \vee q)$
5. Aplique a identidade e obtenha:

   $(p \vee q) \wedge t$
6. Aplique a identidade novamente e obtenha:

   $\boxed{p \vee q}$

© 2014 - AIEC - Associação Internacional de Educação Continuada

Objetivo alcançado! A simplificação reduziu o número de conectivo e a proposição obtida é uma disjunção.

Este direcionamento pode usar o termo **Forma Normal** (FN). Por exemplo: simplifique a proposição $(p \rightarrow q) \rightarrow q$ à sua FN. Acompanhe o detalhamento a seguir.

06

3 - A SIMPLIFICAÇÃO E A FORMA NORMAL DAS PROPOSIÇÕES

Uma proposição está em sua Forma Normal (FN) quando, e somente quando, contém no máximo os conectivos ~, $\wedge$ e $\vee$.

Estão na FN as seguintes proposições, por exemplo:

$$\sim p \wedge q$$
$$\sim(p \vee q)$$
$$(p \vee \sim q) \wedge (r \vee \sim p)$$

Existem dois tipos de FN:

- FND – Forma Normal Disjuntiva (ou Disjunta), e
- FNC – Forma Normal Conjuntiva (ou Conjunta).

Veja mais detalhes a seguir.

07

Uma proposição está na sua **FNC** (Forma Normal Conjuntiva) quando as seguintes características são cumpridas:

• Mantêm-se a característica de uma FN. Ou seja, a proposição deve conter, quando muito, os conectivos ~, $\wedge$ e $\vee$.

• Se a proposição não possui dupla negação, tal como ~~.

• Se tiver negação, a negação não pode ter alcance $\wedge$ e $\vee$, tal como $\sim(p \vee q)$. Ou seja, a negação incide somente sobre a letra proposicional.

• Se o conectivo $\vee$ não possui alcance sobre a $\wedge$, tal como $p \vee (\sim q \wedge \sim p)$, pois neste caso a operação de disjunção é a mais forte.

Uma proposição está na sua **FND** (Forma Normal Disjuntiva) quando as seguintes características são cumpridas:

© 2014 - AIEC - Associação Internacional de Educação Continuada

• Mantêm-se a característica de uma FN. Ou seja, a proposição deve conter, quando muito, os conectivos ~, ∧ e ∨.

• Se a proposição não possui dupla negação, tal como ~~.

• Se tiver negação, a negação não pode ter alcance ∧ e ∨, tal como ~(p∨q). Ou seja, a negação incide somente sobre a letra proposicional.

• Se o conectivo ∧ não possui alcance sobre a ∨, tal como p ∧(~q∨~p), pois neste caso a operação de conjunção é a mais forte.

08

Temos a seguir exemplos tanto de FNC como de FND, explicados de forma bem detalhada:

• Simplifique até a encontrar a menor FNC da proposição ~(((p∨q)∧~q)∨(q ∧ r)):

INÍCIO

1. $\sim(((p \vee q) \wedge \sim q) \vee (q \wedge r))$
2. Aplique MORGAN no parêntese maior e obtenha:

   $\sim((p \vee q) \wedge \sim q) \wedge \sim (q \wedge r)$
3. Aplique MORGAN nos parênteses e obtenha:

   $(\sim(p \vee q) \vee \sim\sim q) \wedge (\sim q \vee \sim r)$
4. Aplique MORGAN no parêntese menor e a dupla negação e obtenha:

   $((\sim p \wedge \sim q) \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim r)$
5. Aplique a distributiva e obtenha:

   $((\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee q)) \wedge (\sim q \vee \sim r)$
6. Aplique a identidade no parêntese do meio e obtenha:

   $\boxed{((\sim p \vee q) \wedge t) \wedge (\sim q \vee \sim r)}$

09

• Simplifique até a encontrar a menor FND da proposição (p→q)∧(q→p):

INÍCIO

1. $(p \to q) \wedge (q \to q)$
2. Aplique a condicional e obtenha:

   $(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee q)$
3. Aplique a identidade no segundo parêntese e obtenha:

   $(\sim p \vee q) \wedge t$
4. Aplique a identidade na linha 3 e obtenha a FND:

   $\boxed{\sim p \vee q}$

10

- Encontre a menor FND e também a menor FNC da proposição $(p \to q) \wedge r$:

INÍCIO

1. $(p \to q) \wedge r$
2. Aplique a condicional na linha 1 e obtenha:

   $(\sim p \vee q) \wedge r$
3. Aplique a distributiva na linha 2 e obtenha:

   $\boxed{(\sim p \wedge r) \vee (q \wedge r)}$

Note que:

- A menor FNC de $(p \to q) \wedge r$ é: $(\sim p \vee q) \wedge r$.
- A menor FND de $(p \to q) \wedge r$ é: $(\sim p \wedge r) \vee (q \wedge r)$.

Perceba então que a obtenção da FNC e FND nem sempre nos conduz para proposições concluintes com um número menor de conectivos lógicos, quando comparadas à proposição original.

A proposições FNC e FND de $(p \to q) \wedge r$ são exemplos disso. Veja a seguir:

- A proposição original $(p \to q) \wedge r$ tem 2 operações lógicas.

- A FNC $(\sim p \vee q) \wedge r$ tem 3 operações lógicas.

© 2014 - AIEC - Associação Internacional de Educação Continuada

• A FND (~p∧r) ∨ (q∧r) tem 4 operações lógicas.

11

• Encontre a menor FND e a menor FNC da proposição (p → q) ↔ (r ∧ p):

INÍCIO

1. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (r \wedge p)$
2. Aplique a regra da condicional na linha 1 e obtenha:

   $(\sim p \vee q) \leftrightarrow (r \wedge p)$
3. Aplique a regra da bicondicional na linha 2 e obtenha:

   $((\sim p \vee q) \rightarrow (r \wedge p)) \wedge ((r \wedge p) \rightarrow (\sim p \vee q))$
4. Aplique a regra da condicional na linha 3 e obtenha:

   $(\sim(\sim p \vee q) \vee (r \wedge p)) \wedge (\sim(r \wedge p) \vee (\sim p \vee q))$
5. Aplique a regra de DE MORGAN na linha 4 e obtenha:

   $((\sim\sim p \wedge \sim q) \vee (r \wedge p)) \wedge ((\sim r \vee \sim p) \vee (\sim p \vee q))$
6. Aplique a regra da dupla negação na linha 5 e obtenha:

   $((p \wedge \sim q) \vee (r \wedge p)) \wedge ((\sim r \vee \sim p) \vee (\sim p \vee q))$
7. Aplique as regras associativa e comutativa no segundo parêntese da linha 6 e obtenha:

   $((p \wedge \sim q) \vee (r \wedge p)) \wedge (\sim r \vee q \vee (\sim p \vee \sim p))$
8. Aplique a regra da idempotência na linha 7 e obtenha:

   $((p \wedge \sim q) \vee (r \wedge p)) \wedge (\sim r \vee q \vee \sim p)$
9. Aplique a regra da distributiva na linha 8 e coloque o p em evidência, obtendo:

   $((p \wedge (\sim q \vee r)) \wedge (\sim r \vee q \vee \sim p)$
10. Aplique as regrasassociativa e comutativa na linha 9 e obtenha:

    $(\sim q \vee r) \wedge (p \wedge (\sim r \vee q \vee \sim p))$
11. Aplique a regra distributiva na linha 10 e obtenha:

    $(\sim q \vee r) \wedge ((p \wedge \sim r) \vee (p \wedge q) \vee (p \wedge \sim p))$
12. Aplique a regra da identidade na linha 11 e obtenha:

    $(\sim q \vee r) \wedge ((p \wedge \sim r) \vee (p \wedge q) \vee c)$
13. Aplique a regra da identidade na linha 12 e obtenha a **FNC:**

    $(\sim q \vee r) \wedge ((p \wedge \sim r) \vee (p \wedge q))$
14. Aplique a regra da distributiva na linha 13 e obtenha a **FND**:

    $\boxed{((\sim q \vee r) \wedge (p \wedge \sim r)) \vee ((\sim q \vee r) \wedge (p \wedge q))}$

© 2014 - AIEC - Associação Internacional de Educação Continuada

12

- Encontre a menor FND e a menor FNC da proposição $p \rightarrow (q \wedge \sim(r \vee p))$:

INÍCIO

1. $p \rightarrow (q \wedge \sim(r \vee p))$

2. Aplique a regra da condicional na linha 1 e obtenha:

$\sim p \vee (q \wedge \sim(r \vee p))$

3. Aplique a regra de DE MORGAN na linha 2 e obtenha:

$\sim p \vee (q \wedge (\sim r \wedge \sim p))$

4. Aplique a regra da distributiva na linha 3 e obtenha:

$(\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee (\sim r \wedge \sim p))$

5. Aplique a regra da distributiva no segundo parêntese na linha 4 e obtenha:

$(\sim p \vee q) \wedge ((\sim p \vee \sim r) \wedge (\sim p \vee \sim p))$

6. Como os 3 parênteses estão interligados por uma mesma operação (a ⊠ neste caso), pode-se eliminar os parênteses maiores e obter:

$(\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim r) \wedge (\sim p \vee \sim p)$

7. Aplique a regra da distributiva para colocar ~p em evidência na linha 6 e obtenha:

$\sim p \vee (q \wedge \sim r \wedge \sim p)$

8. Aplique a regra da absorção da disjunção na linha 7 e obtenha:

$\boxed{\sim p}$

13

A Utilidade da Forma Normal

A principal utilidade da normatização via FNC e FND é a padronização da notação, já que possibilitam a obtenção de proposições lógicas equivalentes entre si, utilizando, quando muito, conjunção, disjunção e negação.

Esta padronização viabiliza o projeto dos chamados circuitos lógicos, os quais usam portas lógicas com funções baseadas nas operações de conjunção, disjunção e negação. Quanto menor a proposição, menor será o circuito lógico, e esta é uma grande vantagem prática!

© 2014 - AIEC - Associação Internacional de Educação Continuada

Sendo assim, essas regras de simplificação e de redução de conectivos são bastante utilizadas no projeto de desenvolvimento de circuitos digitais, conforme detalharemos na próxima Unidade.

14

DESAFIO

Obtenha a FNC e a FND da proposição $(p \leftrightarrow q) \wedge (p \rightarrow \sim q)$ e depois confirme por meio de tabela verdade.

Quer uma dica? Então siga o esquema explicado a seguir:

• Aplique as regras das equivalências notáveis que forem possíveis e obtenha a FNC e a FND.

• Faça a tabela verdade da proposição original $(p \leftrightarrow q) \wedge (p \rightarrow \sim q)$.

• Faça a tabela da proposição FNC e veja se a coluna do resultado ficou realmente equivalente à coluna do resultado da tabela de $(p \leftrightarrow q) \wedge (p \rightarrow \sim q)$.

• Faça a tabela da proposição FND e veja se a coluna do resultado ficou realmente equivalente à coluna do resultado da tabela de $(p \leftrightarrow q) \wedge (p \rightarrow \sim q)$.

Pronto! Este será um grande exercício de revisão! Aproveite, ok?!

15

RESUMO

As regras notáveis são ferramentas à obtenção de proposições mais simples, de menor tamanho e, consequentemente, com um número menor de conectivos lógicos.

Veja um excelente exemplo:

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \sim r) \vee (p \wedge \sim q) \Leftrightarrow p$$

Considere ter que fazer uma tabela verdade de uma proposição. Certamente é menor o trabalho e a possibilidades de erro quando a proposição não é extensa.

© 2014 - AIEC - Associação Internacional de Educação Continuada

Construir uma tabela verdade da proposição **p** seria bem mais simples que a tabela de $\mathbf{(p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge \sim r)\vee(p\wedge \sim q)}$.

É importante atenção ao aplicar as regras de simplificação, garantindo-se obter uma proposição que seja de fato equivalente à proposição original.

A simplificação de proposições pode ser direcionada à obtenção de proposições resultantes que estejam na Forma Normal (FN), ou, mais especificamente, na Forma Normal Conjuntiva (FNC) e Forma Normal Disjuntiva (FND).

Uma proposição está em sua Forma Normal (FN) quando, e somente quando, contém no máximo os conectivos ~, $\wedge$ e $\vee$. A FN pode ser Disjuntiva, sendo então chamada de FND, ou Conjuntiva, que é a FNC.

16

Uma proposição está na sua FNC (Forma Normal Conjuntiva) ou na sua FND (Forma Normal Disjuntiva) quando as seguintes características são cumpridas:

Forma Normal Conjuntiva (FNC)	Forma Normal Disjuntiva (FND)
Mantêm-se a característica de uma FN, devendo conter, quando muito, os conectivos ~, $\wedge$ e $\vee$.	Mantêm-se a característica de uma FN, devendo conter, quando muito, os conectivos ~, $\wedge$ e $\vee$.
A proposição não possui dupla negação do tipo ~~.	A proposição não possui dupla negação do tipo ~~.
Se tiver negação, a negação não pode ter alcance $\wedge$ e $\vee$, tal como $\sim(p \vee q)$.	Se tiver negação, a negação não pode ter alcance $\wedge$ e $\vee$, tal como $\sim(p \vee q)$.
A negação pode incidir somente sobre a letra proposicional.	A negação pode incidir somente sobre a letra proposicional.
O conectivo $\vee$ não pode possuir alcance sobre a $\wedge$, tal como $p\vee(\sim q\wedge\sim p)$.	O conectivo $\wedge$ não pode possuir alcance sobre a $\vee$, tal como $p\wedge (\sim q \vee \sim p)$.

17

Por exemplo, estão na FN as seguintes proposições:

$$\sim p \vee q$$

$$\sim(p \vee q)$$

$$(p \vee \sim q) \wedge (r \vee \sim p)$$

Sendo que:

© 2014 - AIEC - Associação Internacional de Educação Continuada

- ~p ∨ q é uma FND.
- (p ∨ ~q) ∧ (r ∨ ~p) é uma FNC
- ~(p ∨ q) é uma FN, mas não é nem FND e nem FNC.

Veja abaixo uma demonstração de simplificação, na qual as regras de equivalências foram aplicadas até encontrar a menor FND da proposição (p→q)∧(q→p):

INÍCIO

1. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow q)$
2. Aplique a condicional e obtenha:

   $(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee q)$
3. Aplique a identidade no segundo parêntese e obtenha:

   $(\sim p \vee q) \wedge t$
4. Aplique a identidade na linha 3 e obtenha a FND:

   $\boxed{\sim p \vee q}$

© 2014 - AIEC - Associação Internacional de Educação Continuada